Autor: Alfredo Dimas Moreira Garcia.
E-mail: avaliac@sjc.sp.gov.br

Resumo

A Teoria da Relatividade Especial conduz a dois resultados, considerados incompreensíveis por vários renomados físicos, que são a dilatação do tempo e a denominada contração espacial de Lorentz. A solução desses paradoxos me conduziu ao desenvolvimento da Relatividade Ondulatória onde a variação temporal é devida à diferença nos percursos de propagação da luz e o espaço é constante entre os observadores.

Da análise do desenvolvimento da Relatividade Ondulatória podemos sintetizar as seguintes conclusões:
-é uma teoria com princípios totalmente físicos,
-as transformações são lineares,
-matem intactos os princípios Euclidianos,
-considera a transformação de Galileu distinta em cada referencial,
-une a velocidade da luz e o tempo em um único fenômeno,
-desenvolve uma translação real entre os referenciais.

A Relatividade Ondulatória (RO) fornece um conjunto de transformações entre dois referenciais em movimento relativo uniforme, diferentes das obtidas com as transformações de Lorents, para: Espaço (x,y,z), Tempo (t), Velocidade ($\vec{u}$), Aceleração ($\vec{a}$), Energia (E), Momento ($\vec{p}$), Força ($\vec{F}$), Campo elétrico ($\vec{E}$), Campo magnético ($\vec{B}$), Freqüência da luz (y), Corrente Elétrica ($\vec{J}$) e Densidade de Carga Elétrica (ρ).

Tanto a Relatividade ondulatória quanto a Relatividade Especial de Albert Einstein explicam, a experiência de Michel-Morley, o efeito Doppler longitudinal e transversal e fornecem fórmulas exatamente idênticas para:

Aberração do zênite $\Rightarrow tang\alpha = \frac{v}{c} / \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Fórmula de Fresnel $\Rightarrow c' = \frac{c}{n} + v(1-\frac{1}{n^2})$.

Massa (m) com velocidade (u) = [massa de repouso (mo)]/ $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$.

Energia $\Rightarrow E = m.c^2$.

Momento $\Rightarrow \vec{p} = \frac{mo.\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$.

Relação entre Momento (p) e Energia (E) $\Rightarrow E = c.\sqrt{mo^2.c^2 + p^2}$.

Relação entre os Campos Elétrico ($\vec{E}$) e Magnético ($\vec{B}$) $\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}$.

Fórmula de Biot-Savart $\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_o.I}{2\pi R}\vec{u}$

Equação da onda de Louis De Broglie $\Rightarrow \psi(x,t) = a.sen\left[2\pi y\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]$ onde $u = \frac{c^2}{v}$.

Com as equações de transformações entre dois referenciais da RO, obtêm-se a invariância de forma para as equações de Maxwell, seguintes:

$$\Rightarrow div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon o}; \Rightarrow div\vec{E} = 0. \qquad \Rightarrow div\vec{B} = 0. \qquad \Rightarrow Rot\vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

$$\Rightarrow Rot\vec{B} = \mu o.\vec{j} + \varepsilon o.\mu o.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \Rightarrow Rot\vec{B} = \varepsilon o.\mu o.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Outros trabalhos:

§9 O Efeito Sagnac.

§10 A experiência de Ives-Stilwell.

§11 Transformação entre dois referenciais da potencia dos raios luminosos de uma fonte na Teoria da Relatividade Especial.

§12 Linearidade.

§13 Richard C. Tolman.

§14 Composição de Velocidade.

§15 Invariância.

§16 Tempo e freqüência.

§17 Transformação de H. Lorentz

§18 A Experiência de Michelson & Morley

§19 Retrocesso do periélio de Mercúrio de –7,13”

§§19 Avanço do periélio de Mercúrio de 42,79”

§20 Inércia

§21 Avanço do Periélio de Mercúrio de 42,79” calculado com a Relatividade Ondulatória

§22 Deformação espacial

§23 Curvatura do Espaço e Tempo

§24 Princípio Variacional

§24 Princípio Variacional continuação

§25 Espiral logarítmica

§26 Avanço do Periélio de Mercúrio de 42,99”

§27 Avanço do Periélio de Mercúrio de 42,99” Condições de contorno

§28 Avanço do Periélio simplificado

§29 Energia potencial de Yukawa

§30 Energia

§31 Mecânica Quantica dedução das equações de Erwin Schrödinger

§32 Versão Relativística da equação de Erwin Schödinger

§33 Energia Hiperbólica Relativista

§34 Equações hiperbólicas similares às equações de Paul Adrien Maurice Dirac

§35 A Geometria das Transformações de Hendrik Lorentz

Relatividade Ondulatória

§1 Transformações para Espaço e Tempo

A Relatividade Ondulatória (RO) mantém o princípio da relatividade (a) e o princípio da Constancia da velocidade da luz (b), exatamente iguais a Teoria da Relatividade Especial (TRE), que Albert Einstein assim definiu:

a) As leis segundo as quais se modificam os estados dos sistemas físicos são as mesmas, quer sejam referidas a um determinado sistema de coordenadas, quer o sejam a qualquer outro que tenha movimento de translação uniforme em relação ao primeiro.

b) Qualquer raio de luz move-se no sistema de coordenadas “em repouso” com velocidade determinada c, que é a mesma, quer esse raio seja emitido por um corpo em repouso, quer o seja por um corpo em movimento (que explica a experiência de Michel-Morley).

Imaginemos inicialmente dois observadores O e O’ (no vácuo), movendo-se um em relação ao outro em movimento uniforme de translação, isto é, os observadores não giram relativamente um ao outro. Assim o Observador O, solidário aos eixos x, y e z de um sistema de coordenadas Cartesianas retangulares, vê o observador O’ mover-se com velocidade v, no sentido positivo do eixo x, com os respectivos eixos paralelos e deslizando ao longo do eixo x, enquanto que O’, solidário aos eixos x’, y’ e z’ de um sistema de coordenadas Cartesianas retangulares, vê O mover-se com velocidade –v’, no sentido negativo do eixo x’, com os respectivos eixos paralelos e deslizando ao longo do eixo x’. O observador O mede o tempo t e o observador O’ mede o tempo t’ ($t \neq t'$). Admitamos que, ambos os observadores acertem seus relógios de modo que, quando ocorrer à coincidência das origens dos sistemas de coordenadas t = t’ = zero.

No instante que t = t’ = 0, um raio de luz é projetado a partir da origem comum aos dois observadores. Decorrido o intervalo de tempo t o observador O notará que seu raio de luz atingiu simultaneamente com o de O’ o ponto A de coordenadas (x,y,z) com velocidade c e que a origem do sistema do observador O’ percorreu a distância v t ao longo do sentido positivo do eixo x , concluindo que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \qquad 1.1$$

$$x' = x - v\,t. \qquad 1.2$$

Semelhantemente, decorrido o intervalo de tempo t’ o observador O’ notará que seu raio de luz atingiu simultaneamente com o de O o ponto A de coordenadas (x’,y’,z’) com velocidade c e que a origem do sistema do observador O percorreu a distância v’ t’ ao longo do sentido negativo do eixo x’, concluindo que:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \qquad 1.3$$

$$x = x' + v'\,t'. \qquad 1.4$$

Igualando 1.1 com 1.3 temos

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \qquad 1.5$$

Devido à simetria y = y’ e z = z’, que simplificam 1.5 em

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2. \qquad 1.6$$

Para o observador O x’ = x – v t (1.2) que aplicado em 1.6 fornece

$x^2 - c^2 t^2 = (x - v\,t)^2 - c^2 t'^2$ de onde:

$$t' = t\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}}\ . \qquad 1.7$$

Para o observador O’ x = x’ + v’ t’ (1.4) que aplicado em 1.6 fornece

$(x' + v'\,t')^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$ de onde:

$$t = t'\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2 t'}}\ . \qquad 1.8$$

Quadro I, transformações para o espaço e tempo

x' = x – v t	1.2	x = x' + v' t'	1.4
y' = y	1.2.1	y = y'	1.4.1
z' = z	1.2.2	z = z'	1.4.2
$t' = t\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx}{c^2t}}$	1.7	$t = t'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'x'}{c^2t'}}$	1.8

Do sistema de equações formado por 1.2 e 1.4 encontramos

v t = v' t' ou $|v|t = |v'|t'$ (considerando t>o e t'>0) 1.9

o que demonstra a invariância do espaço na relatividade ondulatória.

Do sistema de equações formado por 1.7 e 1.8 encontramos

$$\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx}{c^2t}}\cdot\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'x'}{c^2t'}} = 1. \quad 1.10$$

Se em 1.2 x' = 0 então x = v t, que aplicadas em 1.10 fornece,

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = 1. \quad 1.11$$

Se em 1.10 x = ct e x' = c t' então

$$\left(1-\frac{v}{c}\right)\cdot\left(1+\frac{v'}{c}\right) = 1. \quad 1.12$$

Para o observador O, o principio da Constância da velocidade da luz, garante que as componentes ux, uy e uz da velocidade da luz, também são constantes ao longo de seus eixos, por isso

$$\frac{x}{t}=\frac{dx}{dt}=ux, \frac{y}{t}=\frac{dy}{dt}=uy, \frac{z}{t}=\frac{dz}{dt}=uz \quad 1.13$$

e com isso podemos escrever

$$\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx}{c^2t}} = \sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}. \quad 1.14$$

Com a utilização de 1.7 e 1.9 e 1.14 podemos escrever

$$\frac{|v|}{|v'|}=\frac{t'}{t}=\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx}{c^2t}}=\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}. \quad 1.15$$

Diferenciando 1.9 com v e v' constantes, ou seja, somente o tempo variando temos

$|v|dt = |v'|dt'$ ou $\frac{|v|}{|v'|}=\frac{dt'}{dt}$, 1.16

mas de 1.15 $\frac{|v|}{|v'|}=\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}$ então $dt' = dt\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}$. 1.17

Sendo v e v' constantes as razões $\frac{|v|}{|v'|}$ e $\frac{t'}{t}$ em 1.15 também devem ser constantes, por isso o diferencial de $\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx}{c^2t}}$ deve ser igual a zero, de onde deduz-se $\frac{x}{t}=\frac{dx}{dt}=ux$, que é exatamente igual a 1.13.

Para o observador O’, o principio da Constância da velocidade da luz, garante que as componentes, u’x’, u’y’ e u’z’ da velocidade da luz, também são constantes ao longo de seus eixos, por isso

$$\frac{x'}{t'}=\frac{dx'}{dt'}=u'x',\frac{y'}{t'}=\frac{dy'}{dt'}=u'y',\frac{z'}{t'}=\frac{dz'}{dt'}=u'z' \qquad 1.18$$

e com isso podemos escrever,

$$\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'x'}{c^2t'}}=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}\ . \qquad 1.19$$

Com a utilização de 1.8, 1.9 e 1.19 podemos escrever

$$\frac{|v'|}{|v|}=\frac{t}{t'}=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'x'}{c^2t'}}=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}\ . \qquad 1.20$$

Diferenciando 1.9 com v’ e v constantes, ou seja, somente o tempo variando temos

$|v'|dt'=|v|dt$ ou $\frac{|v'|}{|v|}=\frac{dt}{dt'}$, 1.21

mas de 1.20 $\frac{|v'|}{|v|}=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}$ então $dt=dt'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}$. 1.22

Sendo v’ e v constante as razões $\frac{|v'|}{|v|}$ e $\frac{t}{t'}$ em 1.20 também deve ser constante, por isso o diferencial de $\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'x'}{c^2t'}}$ deve ser igual à zero, de onde se deduz $\frac{x'}{t'}=\frac{dx'}{dt'}=u'x'$, que é exatamente igual a 1.18.

Substituindo 1.14 e 1.19 em 1.10 obtemos,

$$\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}=1. \qquad 1.23$$

Para o observador O, o vetor posição do ponto A de coordenadas (x,y,z) é

$$\vec{R}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \qquad 1.24$$

e o vetor posição da origem do sistema do observador O’ é

$$\vec{R}o'=vt\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}\Rightarrow\vec{R}o'=vt\vec{i}\ . \qquad 1.25$$

Para o observador O’, o vetor posição do ponto A de coordenadas (x’,y’,z’) é

$$\vec{R}'=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\ , \qquad 1.26$$

e o vetor posição da origem do sistema do observador O é

$$\vec{R}'o=-v't'\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}\Rightarrow\vec{R}'o=-v't'\vec{i}\ . \qquad 1.27$$

Devido a 1.9, 1.25 e 1.27 temos, $\vec{R}o'=-\vec{R}'o$. 1.28

Como 1.24 é igual a 1.25 mais 1.26 temos

$$\vec{R}=\vec{R}o'+\vec{R}'\Rightarrow\vec{R}'=\vec{R}-\vec{R}o'. \qquad 1.29$$

Aplicando 1.28 em 1.29 temos, $\vec{R}=\vec{R}'-\vec{R}'o$. 1.30

Para o observador O o vetor velocidade da origem do sistema do observador O’ é

$$\vec{v}=\frac{d\vec{R}o'}{dt}=v\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}\Rightarrow\vec{v}=v\vec{i}\ . \qquad 1.31$$

Para o observador O’ o vetor velocidade da origem do sistema do observador O é

$$\vec{v}'=\frac{d\vec{R}'o}{dt'}=-v'\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}\Rightarrow\vec{v}'=-v'\vec{i}\ . \qquad 1.32$$

De 1.15, 1.20, 1.31 e 1.32 encontramos as seguintes relações entre $\vec{v}$ e $\vec{v}'$

$$\vec{v}=\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}} \qquad 1.33$$

$$\vec{v}'=\frac{-\vec{v}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}}\ . \qquad 1.34$$

Observação: no quadro I as fórmulas 1.2, 1.2.1 e 1.2.2 são os componentes do vetor 1.29 e as fórmulas 1.4, 1.4.1 e 1.4.2 são os componentes do vetor 1.30.

§2 Lei das Transformações das Velocidades $\vec{u}$ e $\vec{u}'$

Diferenciando 1.29 e dividindo por 1.17 temos

$$\frac{d\vec{R}'}{dt'}=\frac{d\vec{R}-d\vec{R}o'}{dt\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}}\Rightarrow\vec{u}'=\frac{\vec{u}-\vec{v}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}}=\frac{\vec{u}-\vec{v}}{\sqrt{K}}\ . \qquad 2.1$$

Diferenciando 1.30 e dividindo por 1.22 temos

$$\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{d\vec{R}'-d\vec{R}'o}{dt'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}}\Rightarrow\vec{u}=\frac{\vec{u}'-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}}=\frac{\vec{u}'-\vec{v}'}{\sqrt{K'}}\ . \qquad 2.2$$

Quadro 2, lei das transformações das velocidades $\vec{u}$ e $\vec{u}'$

$\vec{u}'=\frac{\vec{u}-\vec{v}}{\sqrt{K}}$	2.1	$\vec{u}=\frac{\vec{u}'-\vec{v}'}{\sqrt{K'}}$	2.2
$u'x'=\frac{ux-v}{\sqrt{K}}$	2.3	$ux=\frac{u'x'+v'}{\sqrt{K'}}$	2.4
$u'y'=\frac{uy}{\sqrt{K}}$	2.3.1	$uy=\frac{u'y'}{\sqrt{K'}}$	2.4.1
$u'z'=\frac{uz}{\sqrt{K}}$	2.3.2	$uz=\frac{u'z'}{\sqrt{K'}}$	2.4.2
$\lvert v'\rvert=\frac{\lvert v\rvert}{\sqrt{K}}$	1.15	$\lvert v\rvert=\frac{\lvert v'\rvert}{\sqrt{K'}}$	1.20
$\sqrt{K}=\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}$	2.5	$\sqrt{K'}=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}$	2.6

Multiplicando 2.1 por si mesma temos:

$$u'=\frac{u\sqrt{1+\frac{v^2}{u^2}-\frac{2vux}{u^2}}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}}\ . \qquad 2.7$$

Se em 2.7 fizermos u = c então u’ = c conforme exige o princípio da constância da velocidade da luz.

Multiplicando 2.2 por si mesma temos:

$$u = \frac{u'\sqrt{1+\frac{v'^2}{u'^2}+\frac{2v'u'x'}{u'^2}}}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}}. \qquad 2.8$$

Se em 2.8 fizermos u' = c então u = c conforme exige o princípio da constância da velocidade da luz.

Se em 2.3 fizermos ux = c então $u'x' = \frac{c-v}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vc}{c^2}}} = c$ conforme exige o princípio da constância da velocidade da luz.

Se em 2.4 fizermos u'x' = c então $ux = \frac{c+v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'c}{c^2}}} = c$ conforme exige o princípio da constância da velocidade da luz.

Remodelando 2.7 e 2.8 temos:

$$\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}. \qquad 2.9$$

$$\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad 2.10$$

As relações diretas entre os tempos e as velocidades de dois pontos no espaço, podem ser obtidas, com as igualdades $\vec{u}'=0 \Rightarrow u'x'=0 \Rightarrow ux=v$ provenientes de 2.1, que aplicadas em 1.17, 1.22, 1.20 e 1.15 fornecem

$$dt' = dt\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vv}{c^2}} \Rightarrow dt = \frac{dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad 2.11$$

$$dt = dt'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'0}{c^2}} \Rightarrow dt' = \frac{dt}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad 2.12$$

$$|v| = \frac{|v'|}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'0}{c^2}}} \Rightarrow |v| = \frac{|v'|}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad 2.13$$

$$|v'| = \frac{|v|}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vv}{c^2}}} \Rightarrow |v'| = \frac{|v|}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad 2.14$$

Aberração do zênite.

Para o observador O' solidário com a estrela, u'x' = 0, u'y' = c e u'z' = 0, e para o observador O solidário com a Terra temos do conjunto 2.3

$$0=\frac{ux-v}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}}\Rightarrow ux=v\,,\ c=\frac{uy}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vv}{c^2}}}\Rightarrow uy=c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ \text{, uz = 0,}$$

$$u=\sqrt{ux^2+uy^2+uz^2}=\sqrt{v^2+\left(c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2+0^2}=c$$ exatamente como prevê o principio da relatividade

Para o observador O a luz se propaga em uma direção que faz um ângulo com o eixo y vertical dado por

$$tang\alpha=\frac{ux}{uy}=\frac{v}{c.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad 2{,}15$$

que é a fórmula de aberração do Zênite na relatividade especial.

Se invertêssemos os observadores obteríamos do conjunto 2.4

$$0=\frac{u'x'+v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}}\Rightarrow u'x'=-v'\,,\ c=\frac{u'y'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'(-v')}{c^2}}}\Rightarrow u'y'=c\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\ \text{, u'z'=0,}$$

$$u'=\sqrt{u'x'^2+u'y'^2+u'z'^2}=\sqrt{(-v')^2+\left(c\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\right)^2+0^2}=c$$

$$tang\alpha=\frac{u'x'}{u'y'}=\frac{-v'}{c.\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{-v'/c}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad 2.16$$

que é igual a 2.15, indicando o sinal negativo o sentido contrário dos ângulos.

Fórmula de Fresnel

Considerando em 2.4, $u'x'=c/n$ a velocidade da luz relativa à água, $v'=v$ a velocidade da água em relação ao aparelho, então $ux=c'$ será a velocidade da luz relativa ao laboratório portanto

$$c'=\frac{c/n+v}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}+\frac{2vc/n}{c^2}}}=\frac{c/n+v}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}+\frac{2v}{nc}}}=\left(\frac{c}{n}+v\right)\left(1+\frac{v^2}{c^2}+\frac{2v}{nc}\right)^{-\frac{1}{2}}\cong\left(\frac{c}{n}+v\right)\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}+\frac{2v}{nc}\right)\right]$$

desprezando o termo v^2/c^2 temos

$$c'\cong\left(\frac{c}{n}+v\right)\left(1-\frac{v}{nc}\right)\cong\frac{c}{n}+v-\frac{v}{n^2}-\frac{v^2}{nc}$$

e desprezando o termo v^2/nc temos a fórmula de Fresnel

$$c'=\frac{c}{n}+v-\frac{v}{n^2}=\frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right). \qquad 2.17$$

Efeito Doppler

Fazendo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ em 1.5 temos $r^2 - c^2t^2 = r'^2 - c^2t'^2$ ou $(r - ct) = (r' - ct')\dfrac{(r' + ct')}{(r + ct)}$ substituindo então $r = ct$, $r' = ct'$ e 1.7 encontramos $(r - ct) = (r' - ct')\sqrt{1 + \dfrac{v^2}{c^2} - \dfrac{2vx}{c^2 t}}$ como $c = \dfrac{w}{k} = \dfrac{w'}{k'}$ então $\dfrac{1}{k}(kr - wt) = \dfrac{1}{k'}(k'r' - w't')\sqrt{1 + \dfrac{v^2}{c^2} - \dfrac{2vx}{c^2 t}}$ onde para atender o princípio da relatividade definiremos

$$k' = k\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}} \qquad 2.18$$

resultando na expressão $(kr - wt) = (k'r' - w't')$ simétrica e invariável entre os observadores.

Para o observador O uma expressão na forma de $\psi(r,t) = f(kr - wt)$ 2.19

representa uma curva que se propaga na direção de $\vec{R}$. Para o observador O' uma expressão na forma de

$$\psi'(r',t') = f'(k'r' - w't') \qquad 2.20$$

representa uma curva que se propaga na direção de $\vec{R}'$.

Aplicando em 2.18 $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, $k' = \dfrac{2\pi}{\lambda'}$, 1.14, 1.19, 1.23, 2.5 e 2.6 temos

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{K}} \text{ e } \lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{K'}}, \qquad 2.21$$

que aplicadas em $c = y\lambda = y'\lambda'$ fornece, $y' = y\sqrt{K}$ e $y = y'\sqrt{K'}$. 2.22

Considerando a relação de Planck-Einstein entre energia (E) e freqüência (y), temos para o observador O $E = hy$ e para o observador O' $E' = hy'$ que substituídas em 2.22 fornecem

$$E' = E\sqrt{K} \text{ e } E = E'\sqrt{K'}. \qquad 2.23$$

Se o observador O, que vê o observador O' se deslocar com velocidade v no sentido positivo do eixo x, emite ondas de freqüência y e velocidade c no sentido positivo do eixo x, então de acordo com 2.22 e

$ux = c$ o observado O' medirá as ondas com velocidade c e freqüência $y' = y\left(1 - \dfrac{v}{c}\right)$ 2.24

que é exatamente a fórmula clássica do efeito Doppler longitudinal.

Se o observador O', que vê o observador O se deslocar com velocidade –v' no sentido negativo do eixo x', emite ondas de freqüência y' e velocidade c, então o observador O de acordo com 2.22 e $u'x' = -v'$ medirá ondas de freqüência y e velocidade c em um plano perpendicular ao deslocamento de O' dadas por

$$\gamma = \gamma'\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \qquad 2.25$$

Que é exatamente a fórmula do efeito Doppler transversal na relatividade especial.

§3 Transformações das Acelerações $\vec{a}$ e $\vec{a}'$

Diferenciando 2.1 e dividindo por 1.17 temos

$$\frac{d\vec{u}'}{dt'}=\frac{d\vec{u}/\sqrt{K}}{dt\sqrt{K}}+\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\frac{v}{c^2}\frac{dux/K\sqrt{K}}{dt\sqrt{K}}\Rightarrow \vec{a}'=\frac{\vec{a}}{K}+\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\frac{v}{c^2}\frac{ax}{K^2}. \qquad 3.1$$

Diferenciando 2.2 e dividindo por 1.22 temos

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{d\vec{u}'/\sqrt{K'}}{dt'\sqrt{K'}}-\left(\vec{u}'-\vec{v}'\right)\frac{v'}{c^2}\frac{du'x'/K'\sqrt{K'}}{dt'\sqrt{K'}}\Rightarrow \vec{a}=\frac{\vec{a}'}{K'}-\left(\vec{u}'-\vec{v}'\right)\frac{v'}{c^2}\frac{a'x'}{K'^2}. \qquad 3.2$$

Quadro 3, transformações das acelerações $\vec{a}$ e $\vec{a}'$

$\vec{a}'=\frac{\vec{a}}{K}+\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\frac{v}{c^2}\frac{ax}{K^2}$	3.1	$\vec{a}=\frac{\vec{a}'}{K'}-\left(\vec{u}'-\vec{v}'\right)\frac{v'}{c^2}\frac{a'x'}{K'^2}$	3.2
$a'x'=\frac{ax}{K}+\left(ux-v\right)\frac{v}{c^2}\frac{ax}{K^2}$	3.3	$ax=\frac{a'x'}{K'}-\left(u'x'+v'\right)\frac{v'}{c^2}\frac{a'x'}{K'^2}$	3.4
$a'y'=\frac{ay}{K}+uy\frac{v}{c^2}\frac{ax}{K^2}$	3.3.1	$ay=\frac{a'y'}{K'}-u'y'\frac{v'}{c^2}\frac{a'x'}{K'^2}$	3.4.1
$a'z'=\frac{az}{K}+uz\frac{v}{c^2}\frac{ax}{K^2}$	3.3.2	$az=\frac{a'z'}{K'}-u'z'\frac{v'}{c^2}\frac{a'x'}{K'^2}$	3.4.2
$a'=\frac{a}{K}$	3.8	$a=\frac{a'}{K'}$	3.9
$K=1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}$	3.5	$K'=1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}$	3.6

Dos quadros 2 e 3 podemos concluir que se para o observador O $\vec{u}.\vec{a}=zero$ e $c^2=ux^2+uy^2+uz^2$, então também para o observador O' $\vec{u}'.\vec{a}'=zero$ e $c^2=u'x'^2+u'y'^2+u'z'^2$, portanto $\vec{u}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{u}'$ é perpendicular a $\vec{a}'$ conforme exige a teoria dos vetores.

Diferenciando 1.9 com as velocidades e os tempos variando temos, $tdv+vdt=t'dv'+v'dt'$, mas considerando 1.16 temos:

$$vdt=v'dt'\Rightarrow tdv=t'dv' \qquad 3.7$$

onde substituindo 1.15 e dividindo por 1.17 obtemos, $\frac{dv'}{dt'}=\frac{dv}{dtK}$ ou $a'=\frac{a}{K}$. 3.8

Podemos também substituir 1.20 em 3.7 e dividir por 1.22 deduzindo

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv'}{dt'K'} \text{ ou } a=\frac{a'}{K'}. \qquad 3.9$$

As relações diretas entre os módulos das acelerações a e a' de dois pontos no espaço podem ser obtidas, com as igualdades $\vec{u}'=0\Rightarrow u'x'=0\Rightarrow a'x'=0\Rightarrow \vec{u}=\vec{v}\Rightarrow ux=v$ provenientes de 2.1, que aplicadas em 3.8 e 3.9 fornecem

$$a'=\frac{a}{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vv}{c^2}}=\frac{a}{1-\frac{v^2}{c^2}} \text{ e } a=\frac{a'}{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'0}{c^2}}=\frac{a'}{1+\frac{v'^2}{c^2}}. \qquad 3.10$$

Que também podem ser deduzidas de 3.1 e 3.2 se utilizarmos as mesmas igualdades $\vec{u}'=0\Rightarrow u'x'=0\Rightarrow a'x'=0\Rightarrow \vec{u}=\vec{v}\Rightarrow ux=v$ provenientes de 2.1.

§4 Transformações dos Momentos $\vec{p}$ e $\vec{p}'$

Definidos como $\vec{p} = m(u)\vec{u}$ e $\vec{p}' = m'(u')\vec{u}'$, 4.1

onde $m(u)$ e $m'(u')$ simbolizam as massas funções dos módulos das velocidades $u = |\vec{u}|$ e $u' = |\vec{u}'|$. Obteremos as relações entre $m(u)$ e $m'(u')$ e a massa em repouso m_o, analisando o choque elástico em um plano entre a esfera s que para o observador O se desloca ao longo do eixo y com velocidade uy = w e a esfera s' que para o observador O' se desloca ao longo do eixo y' com velocidade u'y' = -w. As esferas quando observadas em repouso relativo são idênticas e têm massa m_o. O choque considerado é simétrico em relação a uma linha paralela aos eixos y e y' que passe no centro das esferas no momento da colisão.

Antes e após o choque as esferas têm velocidades observadas por O e O' de acordo com a seguinte tabela obtida do quadro 2

	Esfera	Observador O	Observador O'
Antes do choque	s	$uxs = zero$, $uys = w$	$u'x's = -v'$, $u'y's = w\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}$
	s'	$uxs' = v$, $uys' = -w\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$	$u'x's' = zero$, $u'y's' = -w$
Após o choque	s	$uxs = zero$, $uys = -\overline{w}$	$u'x's = -v'$, $u'y's = -\overline{w}\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}$
	s'	$uxs' = v$, $uys' = \overline{w}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$	$u'x's' = zero$, $u'y's' = \overline{w}$

Para o observador O, o princípio de conservação dos momentos, estabelece que os momentos $px = m(u)ux$ e $py = m(u)uy$, das esferas s e s' em relação aos eixos x e y, permanecem constantes antes e após o choque, por isso para o eixo x

$$m\left(\sqrt{uxs^2+uys^2}\right)uxs+m\left(\sqrt{uxs'^2+uys'^2}\right)uxs'=m\left(\sqrt{uxs^2+uys^2}\right)uxs+m\left(\sqrt{uxs'^2+uys'^2}\right)uxs',$$

onde substituindo os valores da tabela obtemos

$$m\left(\sqrt{v^2+\left(-w\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}\right)v=m\left(\sqrt{v^2+\left(\overline{w}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}\right)v \text{ de onde concluímos que } \overline{w}=w,$$

e para o eixo y

$$m\left(\sqrt{uxs^2+uys^2}\right)uys+m\left(\sqrt{uxs'^2+uys'^2}\right)uys'=m\left(\sqrt{uxs^2+uys^2}\right)uys+m\left(\sqrt{uxs'^2+uys'^2}\right)uys',$$

onde substituindo os valores da tabela obtemos

$$m(w)w-m\left(\sqrt{v^2+\left(-w\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}\right)w\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=-m(\overline{w})\overline{w}+m\left(\sqrt{v^2+\left(\overline{w}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}\right)\overline{w}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

simplificando encontramos

$$m(w)=m\left(\sqrt{v^2+w^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \text{ onde quando } w\to 0 \text{ se torna}$$

$$m(0)=m\left(\sqrt{v^2+0^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Rightarrow m(0)=m(v)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Rightarrow m(v)=\frac{m(0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

mais $m(0)$ é igual a massa m_o em repouso portanto

$$m(v)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ no caso da velocidade ser relativa } v=u\Rightarrow m(u)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad 4.2$$

que aplicada em 4.1 fornece $\vec{p} = m(u)\vec{u} = \dfrac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$. 4.1

Com os mesmos procedimentos obteríamos para o observador O'

$$m'(u') = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}} \qquad 4.3$$

e $\vec{p}' = m'(u')\vec{u}' = \dfrac{m_0\vec{u}'}{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}}$. 4.1

Simplificando a simbologia adotaremos $m = m(u) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$ 4,2

e $m' = m'(u') = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}}$ 4.3

que simplificam os momentos em $\vec{p} = m\vec{u}$ e $\vec{p}' = m'\vec{u}'$. 4.1

Aplicando 4.2 e 4.3 em 2.9 e 2.10 obtemos

$$m = m'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}} \Rightarrow m = m'\sqrt{K'} \text{ e } m' = m\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}} \Rightarrow m' = m\sqrt{K}. \qquad 4.4$$

Definindo força como Newton temos $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d(m\vec{u})}{dt}$ e $\vec{F}' = \dfrac{d\vec{p}'}{dt'} = \dfrac{d(m'\vec{u}')}{dt'}$, com isso podemos então definir a energia cinética como

$$E_k = \int_0^u \vec{F}.d\vec{R} = \int_0^u \frac{d(m\vec{u})}{dt}.d\vec{R} = \int_0^u d(m\vec{u}).\vec{u} = \int_0^u \left(u^2dm + mudu\right),$$

e $E'_k = \displaystyle\int_0^{u'} \vec{F}'.d\vec{R}' = \int_0^{u'} \frac{d(m'\vec{u}')}{dt'}.d\vec{R}' = \int_0^{u'} d(m'\vec{u}').\vec{u}' = \int_0^{u'} \left(u'^2\,dm' + m'u'\,du'\right)$.

Remodelando 4.2 e 4.3 e diferenciando temos $m^2c^2 - m^2u^2 = m_0{}^2c^2 \Rightarrow u^2dm + mudu = c^2dm$ e $m'^2\,c^2 - m'^2\,u'^2 = m_0{}^2c^2 \Rightarrow u'^2\,dm' + m'u'\,du' = c^2dm'$, que aplicadas nas fórmulas da energia cinética fornece

$$E_k = \int_{m_0}^{m} c^2dm = mc^2 - m_0c^2 = E - E_0 \text{ e } E'_k = \int_{m_0}^{m'} c^2dm' = m'c^2 - m_0c^2 = E' - E_0, \qquad 4.5$$

onde $E = mc^2$ e $E' = m'c^2$ 4.6

são as energias totais como na relatividade especial e $E_o = m_oc^2$ 4.7
a energia de repouso.

Aplicando 4.6 em 4.4 obtemos exatamente 2.23.

De 4.6, 4.2, 4.3 e 4.1 encontramos:

$$E = c\sqrt{m_o{}^2c^2 + p^2} \text{ e } E' = c\sqrt{m_o{}^2c^2 + p'^2}, \qquad 4.8$$

Relações idênticas as da relatividade especial.

Multiplicando 2.1 e 2.2 por m_o obtemos:

$$\frac{m_o\vec{u}'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}=\frac{m_o\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-\frac{m_o\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Rightarrow m'\vec{u}'=m\vec{u}-m\vec{v}\Rightarrow \vec{p}'=\vec{p}-\frac{E}{c^2}\vec{v} \qquad 4.9$$

e $$\frac{m_o\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{m_o\vec{u}'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}-\frac{m_o\vec{v}'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\Rightarrow m\vec{u}=m'\vec{u}'-m'\vec{v}'\Rightarrow \vec{p}=\vec{p}'-\frac{E'}{c^2}\vec{v}'. \qquad 4.10$$

Quadro 4, transformações dos momentos $\vec{p}$ e $\vec{p}'$

$\vec{p}'=\vec{p}-\frac{E}{c^2}\vec{v}$	4.9	$\vec{p}=\vec{p}'-\frac{E'}{c^2}\vec{v}'$	4.10
$p'x'=px-\frac{E}{c^2}v$	4.11	$px=p'x'+\frac{E'}{c^2}v'$	4.12
$p'y'=py$	4.11.1	$py=p'y'$	4.12.1
$p'z'=pz$	4.11.2	$pz=p'z'$	4.12.2
$E'=E\sqrt{K}$	2.23	$E=E'\sqrt{K'}$	2.23
$m=m(u)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$	4.2	$m'=m'(u')=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}$	4.3
$m'=m\sqrt{K}$	4.4	$m=m'\sqrt{K'}$	4.4
$E_k=E-E_o$	4.5	$E'_k=E'-E_o$	4.5
$E=mc^2$	4.6	$E'=m'c^2$	4.6
$E_o=m_oc^2$	4.7	$E_o=m_oc^2$	4.7
$E=c\sqrt{m_o^2c^2+p^2}$	4.8	$E'=c\sqrt{m_o^2c^2+p'^2}$	4.8

Equação de onda de Louis de Broglie

O observador O' associa a uma partícula em repouso em sua origem as seguintes propriedades:

-massa de repouso m_o
-tempo $t'=t_o$
-Energia de repouso $E_o=m_oc^2$
-Freqüência $\gamma_o=\frac{E_o}{h}=\frac{m_oc^2}{h}$
-Função de onda $\psi_o=asen\,2\pi\gamma_ot_o$ com a = constante.

O observador O associa a uma partícula com velocidade v as seguintes propriedades:
-massa $m=m(v)=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (de 4.2 onde $u=v$)

-tempo $t=\frac{t_o}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vv}{c^2}}}=\frac{t_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (de 1.7 com $ux=v$ e $t'=t_o$)

-Energia $E=\frac{E_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (de 2.23 com $ux=v$ e $E'=E_o$)

-Freqüência $\gamma=\frac{\gamma_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_o c^2/h}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=E/h$ (de 2.22 com $ux=v$ e $\gamma'=\gamma_o$)

-distância x = vt (de 1.2 com x' = 0)

-Função de onda $\psi=asen2\pi\gamma_o t_o=asen2\pi\gamma\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=asen2\pi\gamma\left(t-\frac{x}{u}\right)$ com $u=\frac{c^2}{v}$

-Comprimento de onda $u=\gamma\lambda=\frac{c^2}{v}=\frac{E}{p}=\frac{\gamma h}{p}\Rightarrow\lambda=\frac{h}{p}$ (de 4.9 com $\vec{p}'=\vec{p}_o=0$)

Para voltarmos ao referencial do observador O' onde $\vec{u}'=0\Rightarrow u'x'=0$, consideraremos as seguintes variáveis:

-distância x = v't' (de 1.4 com x' = 0)

-tempo $t=t'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'0}{c^2}}=t'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}$ (de 1.8 com $u'x'=0$)

-freqüência $\gamma=\gamma'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}$ (de 2.22 com $u'x'=0$)

-velocidade $v=\frac{v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$ (de 2.13)

que aplicadas a função de onda fornece

$$\psi'=asen2\pi\gamma\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)=asen2\pi\gamma'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\left(t'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}-\frac{v'^2t'}{c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\right)=asen2\pi\gamma't',$$

mas como $t'=t_o$ e $\gamma'=\gamma_o$ então $\psi'=\psi_o$.

§5 Transformações das Forças $\vec{F}$ e $\vec{F}'$

Diferenciando 4.9 e dividindo por 1.17 temos

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'}=\frac{d\vec{p}}{dt\sqrt{K}}-\frac{dE}{dt\sqrt{K}}\frac{\vec{v}}{c^2}\Rightarrow\vec{F}'=\frac{1}{\sqrt{K}}\left[\vec{F}-\frac{dE}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right]\Rightarrow\vec{F}'=\frac{1}{\sqrt{K}}\left[\vec{F}-\left(\vec{F}.\vec{u}\right)\frac{\vec{v}}{c^2}\right]. \quad 5.1$$

Diferenciando 4.10 e dividindo por 1.22 temos

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\vec{p}'}{dt'\sqrt{K'}}-\frac{dE'}{dt'\sqrt{K'}}\frac{\vec{v}'}{c^2}\Rightarrow\vec{F}=\frac{1}{\sqrt{K'}}\left[\vec{F}'-\frac{dE'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right]\Rightarrow\vec{F}=\frac{1}{\sqrt{K'}}\left[\vec{F}'-\left(\vec{F}'.\vec{u}'\right)\frac{\vec{v}'}{c^2}\right]. \quad 5.2$$

Do sistema formado por 5.1 e 5.2 obtemos

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dE'}{dt'} \text{ ou } \vec{F}.\vec{u}=\vec{F}'.\vec{u}', \quad 5.3$$

que é um invariante entre os observadores na relatividade ondulatória.

Quadro 5, transformações das Forças $\vec{F}$ e $\vec{F}'$

$\vec{F}'=\frac{1}{\sqrt{K}}\left[\vec{F}-\left(\vec{F}.\vec{u}\right)\frac{\vec{v}}{c^2}\right]$	5.1	$\vec{F}=\frac{1}{\sqrt{K'}}\left[\vec{F}'-\left(\vec{F}'.\vec{u}'\right)\frac{\vec{v}'}{c^2}\right]$	5.2
$F'x'=\frac{1}{\sqrt{K}}\left[Fx-\left(\vec{F}.\vec{u}\right)\frac{v}{c^2}\right]$	5.4	$Fx=\frac{1}{\sqrt{K'}}\left[F'x'+\left(\vec{F}'.\vec{u}'\right)\frac{v'}{c^2}\right]$	5.5
$F'y'=Fy/\sqrt{K}$	5.4.1	$Fy=F'y'/\sqrt{K'}$	5.5.1
$F'z'=Fz/\sqrt{K}$	5.4.2	$Fz=F'z'/\sqrt{K'}$	5.5.2
$\frac{dE'}{dt'}=\frac{dE}{dt}$	5.3	$\vec{F}.\vec{u}=\vec{F}'.\vec{u}'$	5.3

§6 Transformações das densidades de carga ρ , ρ' e densidades de corrente $\vec{J}$ e $\vec{J}'$

Multiplicando 2.1 e 2.2 pela densidade de carga elétrica em repouso definida como $\rho_o = \frac{dq}{dv_o}$ temos

$$\frac{\rho_o \vec{u}'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{\rho_o \vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{\rho_o \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow \rho'\vec{u}' = \rho\vec{u} - \rho\vec{v} \Rightarrow \vec{J}' = \vec{J} - \rho\vec{v} \qquad 6.1$$

e $$\frac{\rho_o \vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\rho_o \vec{u}'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} - \frac{\rho_o \vec{v}'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \Rightarrow \rho\vec{u} = \rho'\vec{u}' - \rho'\vec{v}' \Rightarrow \vec{J} = \vec{J}' - \rho'\vec{v}' . \qquad 6.2$$

Quadro 6, transformações das densidades de carga ρ , ρ' e densidades de corrente $\vec{J}$ e $\vec{J}'$

$\vec{J}' = \vec{J} - \rho\vec{v}$	6.1	$\vec{J} = \vec{J}' - \rho'\vec{v}'$	6.2
$J'x' = Jx - \rho v$	6.3	$Jx = J'x' + \rho' v'$	6.4
$J'y' = Jy$	6.3.1	$Jy = J'y'$	6.4.1
$J'z' = Jz$	6.3.2	$Jz = J'z'$	6.4.2
$\vec{J} = \rho\vec{u}$	6.5	$\vec{J}' = \rho'\vec{u}'$	6.6
$\rho = \frac{\rho_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$	6.7	$\rho' = \frac{\rho_o}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}$	6.8
$\rho' = \rho\sqrt{K}$	6.9	$\rho = \rho'\sqrt{K'}$	6.10

Do sistema formado por 6.1 e 6.2 obtivemos 6.9 e 6.10.

§7 Transformações dos campos elétricos $\vec{E}$, $\vec{E}'$ e magnéticos $\vec{B}$, $\vec{B}'$

Aplicando as forças de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ e $\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}')$ em 5.1 e 5.2 temos $q(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}') = \frac{1}{\sqrt{K}}\left[q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \left[q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}).\vec{u}\right]\frac{\vec{v}}{c^2}\right]$

e $q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \frac{1}{\sqrt{K'}}\left[q(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}') - \left[q(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}').\vec{u}'\right]\frac{\vec{v}'}{c^2}\right]$, que simplificadas se tornam

$(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}') = \frac{1}{\sqrt{K}}\left[(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - (\vec{E}.\vec{u})\frac{\vec{v}}{c^2}\right]$ e $(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \frac{1}{\sqrt{K'}}\left[(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}') - (\vec{E}'.\vec{u}')\frac{\vec{v}'}{c^2}\right]$ de onde obtemos a invariância de $\vec{E}.\vec{u} = \vec{E}'\vec{u}'$ entre os observadores como conseqüência de 5.3 e as seguintes componentes de cada eixo

$$\left(E'x' + u'y'B'z' - u'z'B'y'\right) = \frac{1}{\sqrt{K}}\left[Ex + uyBz - uzBy - \frac{Exuxv}{c^2} - \frac{Eyuyv}{c^2} - \frac{Ezuzv}{c^2}\right] \qquad 7.1$$

$$\left(E'y' + u'z'B'x' - u'x'B'z'\right) = \frac{1}{\sqrt{K}}\left[Ey + uzBx - uxBz\right] \qquad 7.1.1$$

$$\left(E'z' + u'x'B'y' - u'y'B'x'\right) = \frac{1}{\sqrt{K}}\left[Ez + uxBy - uyBx\right] \qquad 7.1.2$$

$$\left(Ex + uyBz - uzBy\right) = \frac{1}{\sqrt{K'}}\left[E'x' + u'y'B'z' - u'z'B'y' + \frac{E'x'u'x'v'}{c^2} + \frac{E'y'u'y'v'}{c^2} + \frac{E'z'u'z'v'}{c^2}\right] \qquad 7.2$$

$$\left(Ey + uzBx - uxBz\right) = \frac{1}{\sqrt{K'}}\left[E'y' + u'z'B'x' - u'x'B'z'\right] \qquad 7.2.1$$

$$\left(Ez + uxBy - uyBx\right) = \frac{1}{\sqrt{K'}}\left[E'z' + u'x'B'y' - u'y'B'x'\right] \qquad 7.2.2$$

Para o conjunto 7.1 e 7.2 obtemos duas soluções descritas nos quadros 7 e 8.

Quadro 7, transformações dos campos elétricos $\vec{E}$, $\vec{E}'$ e magnéticos $\vec{B}$ e $\vec{B}'$

$E'x' = \frac{Ex}{\sqrt{K}}\left(1 - \frac{vux}{c^2}\right)$	7.3	$Ex = \frac{E'x'}{\sqrt{K'}}\left(1 + \frac{v'u'x'}{c^2}\right)$	7.4
$E'y' = \frac{Ey}{\sqrt{K}}\left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vux}{c^2}\right) - \frac{vBz}{\sqrt{K}}$	7.3.1	$Ey = \frac{E'y'}{\sqrt{K'}}\left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v'u'x'}{c^2}\right) + \frac{v'B'z'}{\sqrt{K'}}$	7.4.1
$E'z' = \frac{Ez}{\sqrt{K}}\left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vux}{c^2}\right) + \frac{vBy}{\sqrt{K}}$	7.3.2	$Ez = \frac{E'z'}{\sqrt{K'}}\left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v'u'x'}{c^2}\right) - \frac{v'B'y'}{\sqrt{K'}}$	7.4.2
$B'x' = Bx$	7.5	$Bx = B'x'$	7.6
$B'y' = By + \frac{v}{c^2}Ez$	7.5.1	$By = B'y' - \frac{v'}{c^2}E'z'$	7.6.1
$B'z' = Bz - \frac{v}{c^2}Ey$	7.5.2	$Bz = B'z' + \frac{v'}{c^2}E'y'$	7.6.2
$E'y' = Ey\sqrt{K}$	7.7	$Ey = E'y'\sqrt{K'}$	7.8
$E'z' = Ez\sqrt{K}$	7.7.1	$Ez = E'z'\sqrt{K'}$	7.8.1
$By = -\frac{ux}{c^2}Ez$	7.9	$B'y' = -\frac{u'x'}{c^2}E'z'$	7.10
$Bz = \frac{ux}{c^2}Ey$	7.9.1	$B'z' = \frac{u'x'}{c^2}E'y'$	7.10.1

Quadro 8, transformações dos campos elétricos $\vec{E}$, $\vec{E}'$ e magnéticos $\vec{B}$ e $\vec{B}'$

$E'x' = \frac{1}{\sqrt{K}}\left[Ex - \left(\vec{E}.\vec{u}\right)\frac{v}{c^2}\right]$	7.11	$Ex = \frac{1}{\sqrt{K'}}\left[E'x' + \left(\vec{E}'.\vec{u}'\right)\frac{v'}{c^2}\right]$	7.12
$E'y' = \frac{1}{\sqrt{K}}\left[Ey - vBz\right]$	7.11.1	$Ey = \frac{1}{\sqrt{K'}}\left(E'y' + v'B'z'\right)$	7.12.1
$E'z' = \frac{1}{\sqrt{K}}\left[Ez + vBy\right]$	7.11.2	$Ez = \frac{1}{\sqrt{K'}}\left(E'z' - v'B'y'\right)$	7.12.2
$B'x' = Bx$	7.13	$Bx = B'x'$	7.14
$B'y' = By$	7.13.1	$By = B'y'$	7.14.1
$B'z' = Bz$	7.13.2	$Bz = B'z'$	7.14.2

Relação entre o campo elétrico e o campo magnético

Se um campo eletromagnético tem para o observador O' a componente magnética nula $\vec{B}' = zero$ e a componente elétrica $\vec{E}'$. Para o observador O este campo se apresenta com ambas as componentes, sendo o campo magnético descrito pelo conjunto 7.5 e tem como componentes:

$$Bx = zero,\ By = -\frac{vEz}{c^2},\ Bz = \frac{vEy}{c^2}, \qquad 7.15$$

que são equivalentes a $\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}$. 7.16

Fórmula de Biot-Savart

O observador O’ associa a uma carga elétrica, em repouso, distribuída uniformemente ao longo de seu eixo x’ as propriedades eletromagnéticas seguintes:

-densidade linear de carga elétrica em repouso $\rho_o = \dfrac{dq}{dx'}$

-corrente elétrica nula $I' = zero$

-campo magnético nulo $\vec{B}' = zero \Rightarrow \vec{u}' = zero$

-campo elétrico radial de módulo $E' = \sqrt{E'y'^2 + E'z'^2} = \dfrac{\rho_o}{2\pi\varepsilon_o R}$ em qualquer ponto de raio $R = \sqrt{y'^2 + z'^2}$ com a componente $E'x' = zero$.

Para o observador O trata-se de uma carga elétrica distribuída uniformemente ao longo de seu eixo x com velocidade $ux = v$ a qual associa as propriedades eletromagnéticas seguintes:

-densidade linear de carga elétrica $\rho = \dfrac{\rho_o}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ (de 6.7 com u = v)

-corrente elétrica $I = \rho v = \dfrac{\rho_o v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

-campo elétrico radial de módulo $E = \dfrac{E'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ (de acordo com os conjuntos 7.3 e 7.5 com $\vec{B}' = zero \Rightarrow \vec{u}' = zero$ e $ux = v$)

-campo magnético de componentes $Bx = zero$, $By = -\dfrac{vEz}{c^2}$, $Bz = \dfrac{vEy}{c^2}$ e módulo $B = \dfrac{vE}{c^2} = \dfrac{v}{c^2}\dfrac{E'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{v}{c^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\dfrac{\rho_o}{2\pi\varepsilon_o R} = \dfrac{\mu_o I}{2\pi R}$ onde $\mu_o = \dfrac{1}{\varepsilon_o c^2}$, sendo na forma vetorial

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi R}\vec{u} \qquad 7.17$$

onde $\vec{u}$ é um vetor unitário perpendicular ao campo elétrico $\vec{E}$ e tangente a circunferência que passa pelo ponto de raio $R = \sqrt{y^2 + z^2}$ porque do conjunto 7.4 e 7.6 $\vec{E}.\vec{B} = zero$.

§8 Transformações dos operadores diferenciais

Quadro 9, operadores diferenciais

$\dfrac{\partial}{\partial x'} = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}$	8.1	$\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x'} - \dfrac{v'}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t'}$	8.2
$\dfrac{\partial}{\partial y'} = \dfrac{\partial}{\partial y}$	8.1.1	$\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y'}$	8.2.1
$\dfrac{\partial}{\partial z'} = \dfrac{\partial}{\partial z}$	8.1.2	$\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z'}$	8.2.2
$\dfrac{\partial}{\partial t'} = \dfrac{v}{\sqrt{K}}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{\sqrt{K}}\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}-\dfrac{vx}{c^2 t}\right)\dfrac{\partial}{\partial t}$	8.3	$\dfrac{\partial}{\partial t} = -\dfrac{v'}{\sqrt{K'}}\dfrac{\partial}{\partial x'} + \dfrac{1}{\sqrt{K'}}\left(1+\dfrac{v'^2}{c^2}+\dfrac{v'x'}{c^2 t'}\right)\dfrac{\partial}{\partial t'}$	8.4

Do sistema formado por 8.1, 8.2, 8.3 e 8.4 e com 1.15 e 1.20 encontramos somente as soluções

$$\frac{\partial}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}=o \text{ e } \frac{\partial}{\partial x'}+\frac{x'/t'}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}=o \qquad 8.5$$

Do que concluímos que somente as funções ψ (2.19) e ψ' (2.20) que atenderem as condições

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}=o \text{ e } \frac{\partial\psi'}{\partial x'}+\frac{x'/t'}{c^2}\frac{\partial\psi'}{\partial t'}=o\,, \qquad 8.6$$

podem representar a propagação com velocidade c na relatividade ondulatória, indicando que o campo propaga com velocidade definida e sem distorção atendendo a 1.13 e 1.18. Devido à simetria, também podemos escrever para os demais eixos

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{y/t}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}=o\,,\ \frac{\partial\psi'}{\partial y'}+\frac{y'/t'}{c^2}\frac{\partial\psi'}{\partial t'}=o \text{ e } \frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{z/t}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}=o\,,\ \frac{\partial\psi'}{\partial z'}+\frac{z'/t'}{c^2}\frac{\partial\psi'}{\partial t'}=o\,. \qquad 8.7$$

Das transformações de espaço e tempo da relatividade ondulatória obtemos para o teorema de Jacob

$$J=\frac{\partial(x',y',z',t')}{\partial(x,y,z,t)}=\frac{1-\frac{vux}{c^2}}{\sqrt{K}} \text{ e } J'=\frac{\partial(x,y,z,t)}{\partial(x',y',z',t')}=\frac{1+\frac{v'u'x'}{c^2}}{\sqrt{K'}}\,, \qquad 8.8$$

variáveis com ux e u'x' conseqüência do princípio da constância da velocidade da luz, mas são iguais $J=J'$ e serão iguais a um $J=J'=1$ quando $ux=u'x'=c$.

Invariância da Equação de Onda

A equação de onda para o observador O' é

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}=zero$$

onde aplicando às fórmulas do quadro 9 e 1.13 obtemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\left[\frac{v}{\sqrt{K}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{K}}\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{vux}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]^2=zero$$

de onde encontramos

$$K\frac{\partial^2}{\partial x^2}+K\frac{\partial^2}{\partial y^2}+K\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{2v^3}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-\frac{4v^2ux}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{v^4}{c^6}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{2v^3ux}{c^6}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-$$

$$-\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-\frac{2v^3}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{2v^2ux}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-\frac{2v^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2vux}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2v^3ux}{c^6}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{v^2ux^2}{c^6}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{v^4}{c^6}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=zero$$

que simplificando fornece

$$K\frac{\partial^2}{\partial x^2}+K\frac{\partial^2}{\partial y^2}+K\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{2v^2ux}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2vux}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{v^2ux^2}{c^6}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=zero$$

onde reordenando os termos encontramos

$$K\frac{\partial^2}{\partial x^2}+K\frac{\partial^2}{\partial y^2}+K\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}\right)\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2ux}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{ux^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)=zero \qquad 8.9$$

mais de 8.5 e 1.13 temos $\frac{\partial}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}=o \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{ux}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2ux}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{ux^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=zero$

que aplicada em 8.9 fornece a equação de onda para o observador O

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=zero\,. \qquad 8.10$$

Para retornar ao referencial do observador O' aplicaremos em 8.10 às fórmulas do quadro 9 e 1.18, obtendo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\left[-\frac{v'}{\sqrt{K'}}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{1}{\sqrt{K'}}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{v'u'x'}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\right]^2=zero$$

de onde encontramos

$$K'\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+K'\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+K'\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{2v'}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}-\frac{2v'^3}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}-\frac{4v'^2u'x'}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}+\frac{v'^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}+\frac{v'^4}{c^6}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}+$$

$$+\frac{2v'^3u'x'}{c^6}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{v'^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{2v'}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}+\frac{2v'^3}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}+\frac{2v'^2u'x'}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}-\frac{2v'^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{2v'u'x'}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-$$

$$-\frac{v'^3u'x'}{c^6}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{v'^2u'x'^2}{c^6}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{v'^4}{c^6}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}=zero$$

que simplificando fornece

$$K'\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+K'\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+K'\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{2v'^2u'x'}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}-\frac{v'^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}-\frac{v'^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{2v'u'x'}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{v'^2u'x'^2}{c^6}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}=zero$$

onde reordenando os termos encontramos

$$K'\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+K'\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+K'\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\left(1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}\right)\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{v'^2}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{2u'x'}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}+\frac{u'x'^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)=zero$$

mais de 8.5 e 1.18 temos

$$\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{x'/t'}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}=o\Rightarrow\left(\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{u'x'}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2=\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{2u'x'}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}+\frac{u'x'^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}=zero$$

que substituída na equação reordenada fornece a equação de onda para o observador O'.

Invariância da Equação de continuidade

A equação de continuidade na forma diferencial para o observador O' é

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\vec{\nabla}.\vec{J}'=zero\Rightarrow\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\frac{\partial Jx'}{\partial x'}+\frac{\partial Jy'}{\partial y'}+\frac{\partial Jz'}{\partial z'}=zero \qquad 8.11$$

onde substituindo as fórmulas do quadro 6, 9 e 1.13 obtemos

$$\left(\frac{v}{\sqrt{K}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{K}}\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{vux}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right)\rho\sqrt{K}+\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)(Jx-\rho v)+\frac{\partial Jy}{\partial y}+\frac{\partial Jz}{\partial z}=zero$$

fazendo as operações encontramos

$$\frac{v\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{vux}{c^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial Jx}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial Jx}{\partial t}-\frac{v\partial\rho}{\partial x}-\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial Jy}{\partial y}+\frac{\partial Jz}{\partial z}=zero$$

que simplificando fornece

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{vux}{c^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial Jx}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial Jx}{\partial t}+\frac{\partial Jy}{\partial y}+\frac{\partial Jz}{\partial z}=zero$$

onde aplicando $Jx=\rho ux$ com ux constante obtemos

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{vux}{c^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial Jx}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial(\rho ux)}{\partial t}+\frac{\partial Jy}{\partial y}+\frac{\partial Jz}{\partial z}=zero\Rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial Jx}{\partial x}+\frac{\partial Jy}{\partial y}+\frac{\partial Jz}{\partial z}=zero \qquad 8.12$$

que é a equação de continuidade na forma diferencial para o observador O.

Para obtermos novamente a equação de continuidade na forma diferencial para o observador O'. Substituiremos as fórmulas do quadro 6, 9 e 1.18 em 8.12 obtendo:

$$\left(-\frac{v'}{\sqrt{K'}}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{1}{\sqrt{K'}}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{v'u'x'}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\right)\rho'\sqrt{K'}+\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)(J'x'+\rho'v')+\frac{\partial J'y'}{\partial y'}+\frac{\partial J'z'}{\partial z'}=zero$$

fazendo as operações encontramos

$$-\frac{v'\partial\rho'}{\partial x'}+\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\frac{v'^2}{c^2}\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\frac{v'u'x'}{c^2}\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\frac{\partial J'x'}{\partial x'}-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial J'x'}{\partial t'}+\frac{v'\partial\rho'}{\partial x'}-\frac{v'^2}{c^2}\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\frac{\partial J'y'}{\partial y'}+\frac{\partial J'z'}{\partial z'}=zero$$

que simplificando fornece

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\frac{v'u'x'}{c^2}\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\frac{\partial J'x'}{\partial x'}-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial J'x'}{\partial t'}+\frac{\partial J'y'}{\partial y'}+\frac{\partial J'z'}{\partial z'}=zero$$

onde aplicando $J'x'=\rho'u'x'$ com u'x' constante obtemos

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\frac{v'u'x'}{c^2}\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\frac{\partial J'x'}{\partial x'}-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial(\rho'u'x')}{\partial t'}+\frac{\partial J'y'}{\partial y'}+\frac{\partial J'z'}{\partial z'}=zero\Rightarrow\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\frac{\partial J'x'}{\partial x'}+\frac{\partial J'y'}{\partial y'}+\frac{\partial J'z'}{\partial z'}=zero$$

que é a equação de continuidade na forma diferencial para o observador O'.

Invariância das Equações de Maxwell

Que na forma diferencial são escritas na seguinte forma
Com carga elétrica

Para o observador O		Para o observador O'	
$\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{\partial Ez}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_o}$	8.13	$\frac{\partial E'x'}{\partial x'}+\frac{\partial E'y'}{\partial y'}+\frac{\partial E'z'}{\partial z'}=\frac{\rho'}{\varepsilon_o}$	8.14
$\frac{\partial Bx}{\partial x}+\frac{\partial By}{\partial y}+\frac{\partial Bz}{\partial z}=0$	8.15	$\frac{\partial B'x'}{\partial x'}+\frac{\partial B'y'}{\partial y'}+\frac{\partial B'z'}{\partial z'}=0$	8.16
$\frac{\partial Ey}{\partial x}-\frac{\partial Ex}{\partial y}=-\frac{\partial Bz}{\partial t}$	8.17	$\frac{\partial E'y'}{\partial x'}-\frac{\partial E'x'}{\partial y'}=-\frac{\partial B'z'}{\partial t'}$	8.18
$\frac{\partial Ez}{\partial y}-\frac{\partial Ey}{\partial z}=-\frac{\partial Bx}{\partial t}$	8.19	$\frac{\partial E'z'}{\partial y'}-\frac{\partial E'y'}{\partial z'}=-\frac{\partial B'x'}{\partial t'}$	8.20
$\frac{\partial Ex}{\partial z}-\frac{\partial Ez}{\partial x}=-\frac{\partial By}{\partial t}$	8.21	$\frac{\partial E'x'}{\partial z'}-\frac{\partial E'z'}{\partial x'}=-\frac{\partial B'y'}{\partial t'}$	8.22
$\frac{\partial By}{\partial x}-\frac{\partial Bx}{\partial y}=\mu_o Jz+\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial Ez}{\partial t}$	8.23	$\frac{\partial B'y'}{\partial x'}-\frac{\partial B'x'}{\partial y'}=\mu_o J'z'+\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial E'z'}{\partial t'}$	8.24
$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\mu_o Jx+\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial Ex}{\partial t}$	8.25	$\frac{\partial B'z'}{\partial y'}-\frac{\partial B'y'}{\partial z'}=\mu_o J'x'+\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial E'x'}{\partial t'}$	8.26
$\frac{\partial Bx}{\partial z}-\frac{\partial Bz}{\partial x}=\mu_o Jy+\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial Ey}{\partial t}$	8.27	$\frac{\partial B'x'}{\partial z'}-\frac{\partial B'z'}{\partial x'}=\mu_o J'y'+\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial E'y'}{\partial t'}$	8.28

Sem carga elétrica $\rho=\rho'=zero$ e $\vec{J}=\vec{J}'=zero$

Para o observador O		Para o observador O'	
$\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{\partial Ez}{\partial z}=0$	8.29	$\frac{\partial E'x'}{\partial x'}+\frac{\partial E'y'}{\partial y'}+\frac{\partial E'z'}{\partial z'}=0$	8.30
$\frac{\partial Bx}{\partial x}+\frac{\partial By}{\partial y}+\frac{\partial Bz}{\partial z}=0$	8.31	$\frac{\partial B'x'}{\partial x'}+\frac{\partial B'y'}{\partial y'}+\frac{\partial B'z'}{\partial z'}=0$	8.32
$\frac{\partial Ey}{\partial x}-\frac{\partial Ex}{\partial y}=-\frac{\partial Bz}{\partial t}$	8.33	$\frac{\partial E'y'}{\partial x'}-\frac{\partial E'x'}{\partial y'}=-\frac{\partial B'z'}{\partial t'}$	8.34
$\frac{\partial Ez}{\partial y}-\frac{\partial Ey}{\partial z}=-\frac{\partial Bx}{\partial t}$	8.35	$\frac{\partial E'z'}{\partial y'}-\frac{\partial E'y'}{\partial z'}=-\frac{\partial B'x'}{\partial t'}$	8.36
$\frac{\partial Ex}{\partial z}-\frac{\partial Ez}{\partial x}=-\frac{\partial By}{\partial t}$	8.37	$\frac{\partial E'x'}{\partial z'}-\frac{\partial E'z'}{\partial x'}=-\frac{\partial B'y'}{\partial t'}$	8.38
$\frac{\partial By}{\partial x}-\frac{\partial Bx}{\partial y}=\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial Ez}{\partial t}$	8.39	$\frac{\partial B'y'}{\partial x'}-\frac{\partial B'x'}{\partial y'}=\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial E'z'}{\partial t'}$	8.40
$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial Ex}{\partial t}$	8.41	$\frac{\partial B'z'}{\partial y'}-\frac{\partial B'y'}{\partial z'}=\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial E'x'}{\partial t'}$	8.42
$\frac{\partial Bx}{\partial z}-\frac{\partial Bz}{\partial x}=\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial Ey}{\partial t}$	8.43	$\frac{\partial B'x'}{\partial z'}-\frac{\partial B'z'}{\partial x'}=\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial E'y'}{\partial t'}$	8.44
$\varepsilon_o\mu_o=\frac{1}{c^2}$	8.45		

Demonstremos a invariância da lei de Gauss na forma diferencial, que para o observador O' é

$$\frac{\partial E'x'}{\partial x'}+\frac{\partial E'y'}{\partial y'}+\frac{\partial E'z'}{\partial z'}=\frac{\rho'}{\varepsilon_o} \quad 8.14$$

onde substituindo as fórmulas dos quadros 6, 7, 9 e 1.13, e considerando ux constante, obtemos

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right]\frac{Ex}{\sqrt{K}}\left(1-\frac{vux}{c^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{Ey}{\sqrt{K}}\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{vux}{c^2}\right)-\frac{vBz}{\sqrt{K}}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{Ez}{\sqrt{K}}\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{vux}{c^2}\right)+\frac{vBy}{\sqrt{K}}\right]=\frac{\rho\sqrt{K}}{\varepsilon_o}$$

fazendo os produtos, somando e subtraindo o termo $\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}$, encontramos

$$\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}-\frac{vux}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}-\frac{v^2ux}{c^4}\frac{\partial Ex}{\partial t}+\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial y}-\frac{vux}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial y}-\frac{v\partial Bz}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial Ez}{\partial z}+\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial z}-\frac{vux}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial z}+\frac{v\partial By}{\partial z}+\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}-\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}=\frac{\rho K}{\varepsilon_o}$$

que reordenando resulta em

$$-\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}\right)-v\left(\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{\partial Ez}{\partial z}\right)\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{vux}{c^2}\right)=\frac{\rho K}{\varepsilon_o}$$

onde o primeiro parêntese é 8.5 e por isso igual a zero, o segundo parêntese é igual a $-v(\mu_o Jx)=-v\mu_o\rho ux=-\frac{v\rho ux}{\varepsilon_o c^2}$ obtido de 8.25 e 8.45 resultando então em

$$\left(\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{\partial Ez}{\partial z}\right)\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{vux}{c^2}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_o}\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{vux}{c^2}\right)-\frac{\rho}{\varepsilon_o}\frac{vux}{c^2}+\frac{\rho}{\varepsilon_o}\frac{vux}{c^2}$$

de onde obtemos $\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{\partial Ez}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_o}$ 8.13

que é a lei de Gauss na forma diferencial para o observador O.

Para fazer o inverso substituiremos em 8.13 as fórmulas dos quadros 6, 7, 9 e 1.18, e considerando u'x' constante, obtemos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right]\frac{E'x'}{\sqrt{K'}}\left(1+\frac{v'u'x'}{c^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{E'y'}{\sqrt{K'}}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{v'u'x'}{c^2}\right)+\frac{v'B'z'}{\sqrt{K'}}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z'}\left[\frac{E'z'}{\sqrt{K'}}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{v'u'x'}{c^2}\right)-\frac{v'B'y'}{\sqrt{K'}}\right]=\frac{\rho'\sqrt{K'}}{\varepsilon_o}$$

fazendo os produtos, somando e subtraindo o termo $\frac{v'^2}{c^2}\frac{\partial E'x'}{\partial x'}$, obtemos

$$\frac{\partial E'x'}{\partial x'}-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial E'x'}{\partial t'}+\frac{v'u'x'}{c^2}\frac{\partial E'x'}{\partial x'}-\frac{v'^2u'x'}{c^4}\frac{\partial E'x'}{\partial t'}+\frac{\partial E'y'}{\partial y'}+\frac{v'^2}{c^2}\frac{\partial E'y'}{\partial y'}+\frac{v'u'x'}{c^2}\frac{\partial E'y'}{\partial y'}+$$

$$+\frac{v'\partial B'z'}{\partial y'}+\frac{\partial E'z'}{\partial z'}+\frac{v'^2}{c^2}\frac{\partial E'z'}{\partial z'}+\frac{v'u'x'}{c^2}\frac{\partial E'z'}{\partial z'}-\frac{v'\partial B'y'}{\partial z'}+\frac{v'^2}{c^2}\frac{\partial E'x'}{\partial x'}-\frac{v'^2}{c^2}\frac{\partial E'x'}{\partial x'}=\frac{\rho'K'}{\varepsilon_o}$$

que reordenando resulta em

$$-\frac{v'^2}{c^2}\left(\frac{\partial E'x'}{\partial x'}+\frac{u'x'}{c^2}\frac{\partial E'x'}{\partial t'}\right)+v'\left(\frac{\partial B'z'}{\partial y'}-\frac{\partial B'y'}{\partial z'}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E'x'}{\partial t'}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial E'x'}{\partial x'}+\frac{\partial E'y'}{\partial y'}+\frac{\partial E'z''}{\partial z'}\right)\left(1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{v'u'x'}{c^2}\right)=\frac{\rho'K'}{\varepsilon_o}$$

onde o primeiro parêntese é 8.5 e por isso igual a zero o segundo parêntese é igual a $v'(\mu_o J'x')=v'\mu_o\rho'u'x'=\frac{v'\rho'u'x'}{\varepsilon_o c^2}$ obtido de 8.26 e 8.45 resultando então em

$$\left(\frac{\partial E' x'}{\partial x'}+\frac{\partial E' y'}{\partial y'}+\frac{\partial E' z'}{\partial z'}\right)\left(1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{v'u'x'}{c^2}\right)=\frac{\rho'}{\varepsilon_o}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{v'u'x'}{c^2}\right)+\frac{\rho}{\varepsilon_o}\frac{v'u'x'}{c^2}-\frac{\rho'}{\varepsilon_o}\frac{v'u'x'}{c^2}$$

de onde obtemos $\frac{\partial E'' x'}{\partial x'}+\frac{\partial E' y'}{\partial y'}+\frac{\partial E' z'}{\partial z'}=\frac{\rho'}{\varepsilon_o}$ que é a lei de Gauss na forma diferencial para o observador O'.
Procedendo desta forma podemos provar a invariância de forma para todas as demais equações de Maxwell.

§9 Explicando o Efeito Sagnac com a Relatividade Ondulatória

Transformemos o movimento retilíneo dos observadores O e O' utilizado na dedução da Relatividade Ondulatória em um movimento circular plano de raio constante. Imaginemos que o observador O vê o observador O' girar com velocidade tangencial v no sentido horário(C) (igual ao sentido positivo do eixo x da RO) e que o observador O' vê o observador O girar com velocidade tangencial v' no sentido anti-horário (U) (igual ao sentido negativo do eixo x da RO).

No instante t = t' = zero o observador O emitirá dois raios de luz a partir da origem comum aos dois observadores, um no sentido anti-horário de arco ct_U e outro no sentido horário de arco ct_C, portanto $ct_U = ct_C$ e $t_U = t_C$, porque c é a velocidade da luz constante, t_U e t_C o tempo. No instante t = t' = zero também o observador O' emitirá dois raios de luz a partir da origem comum aos dois observadores, um no sentido anti-horário (inútil) de arco ct'_U e outro no sentido horário de arco ct'_C, portanto $ct'_U = ct'_C$ e $t'_U = t'_C$ porque c é a velocidade da luz constante, t'_U e t'_C o tempo.

Reescrevamos as equações 1.15 e 1.20 da Relatividade Ondulatória (RO):

$$\frac{|v|}{|v'|}=\frac{t'}{t}=\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}\,. \qquad 1.15$$

$$\frac{|v'|}{|v|}=\frac{t}{t'}=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}\,. \qquad 1.20$$

Fazendo ux = u'x' = c (raio de luz projetado ao longo do eixo x positivo) e desmembrando as equações obtemos:

$$t'=t\left(1-\frac{v}{c}\right) \qquad 9.1 \qquad\qquad t=t'\left(1+\frac{v'}{c}\right) \qquad 9.2$$

$$v'=\frac{v}{\left(1-\frac{v}{c}\right)} \qquad 9.3 \qquad\qquad v=\frac{v'}{\left(1+\frac{v'}{c}\right)} \qquad 9.4$$

Quando a origem do observador O' detectar o raio anti-horário do observador O, estará a distância $vt_C = v't'_U$ do observador O e simultaneamente detectará o seu raio horário no mesmo ponto que o raio horário do observador O, em uma posição simétrica ao diâmetro que passa pelo observador O porque $ct_U = ct_C \Rightarrow t_U = t_C$ e $ct'_U = ct'_C \Rightarrow t'_U = t'_C$, obedecendo as quatro equações acima, encontramos:

$$ct_U + vt_C = 2\pi R \Rightarrow t_C = \frac{2\pi R}{c+v} \qquad 9.5$$

$$ct'_C + 2v't'_U = 2\pi R \Rightarrow t'_C = \frac{2\pi R}{c+2v'} \qquad 9.6$$

Quando a origem do observador O' detectar o raio horário do observador O, simultaneamente detectará seu próprio raio horário e estará a distância $vt_{2C} = v't'_{2U}$ do observador O, então obedecendo a equações 1,2,3 e 4 acima, teremos:

$$ct_{2C} = 2\pi R + vt_{2C} \Rightarrow t_{2C} = \frac{2\pi R}{c - v} \qquad 9.7$$

$$ct'_{2C} = 2\pi R \Rightarrow t'_{2C} = \frac{2\pi R}{c} \qquad 9.8$$

A diferença de tempo para o observador O é:

$$\Delta t = t_{2C} - t_C = \frac{2\pi R}{c - v} - \frac{2\pi R}{c + v} = \frac{4\pi R v}{c^2 - v^2} \qquad 9.9$$

A diferença de tempo para o observador O' é:

$$\Delta t' = t'_{2C} - t'_C = \frac{2\pi R}{c} - \frac{2\pi R}{c + 2v'} = \frac{4\pi R v'}{(c + 2v')c} \qquad 9.10$$

Substituindo as equações 5 a 10 em 1 a 4 comprovamos que elas cumprem as transformações da Relatividade Ondulatória.

§10 Explicando a experiência de Ives-Stilwell com a Relatividade Ondulatória

Reescrevamos as equações (2.21) para o comprimento de onda na Relatividade Ondulatória (RO):

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}} \text{ e } \lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}}, \qquad 2.21$$

Fazendo ux = u'x' = c (raio de luz projetado ao longo do eixo x positivo), obtemos as equações:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \text{ e } \lambda = \frac{\lambda'}{\left(1 + \frac{v'}{c}\right)}, \qquad 10.1$$

Se o observador O, que vê o observador O' se distanciando com velocidade v no sentido positivo do eixo x, emite ondas, provenientes de uma fonte estacionada em sua origem com velocidade c e comprimento de onda λ_F no sentido positivo do eixo x, então de acordo com 10.1 o observador O' medirá as ondas com velocidade c e comprimento de onda λ'_D de acordo com as fórmulas:

$$\lambda'_D = \frac{\lambda_F}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \text{ e } \lambda_F = \frac{\lambda'_D}{\left(1 + \frac{v'}{c}\right)}, \qquad 10.2$$

Se o observador O', que vê o observador O se aproximando com velocidade v' no sentido negativo do eixo x, emite ondas, provenientes de uma fonte estacionada em sua origem com velocidade c e comprimento de onda λ'_F no sentido positivo do eixo x, então de acordo com 10.1 o observador O medirá as ondas com velocidade c e comprimento de onda λ_A de acordo com as fórmulas:

$$\lambda'_F = \frac{\lambda_A}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \text{ e } \lambda_A = \frac{\lambda'_F}{\left(1 + \frac{v'}{c}\right)}, \qquad 10.3$$

As fontes estacionadas nas origens dos Observadores O e O' são idênticas portanto $\lambda_F = \lambda'_F$.

Achemos o comprimento de onda médio $\overline{\lambda}$ das ondas medidas (λ_A, λ'_D) utilizando as fórmulas 10.2 e 10.3, lado esquerdo:

$$\bar{\lambda}=\frac{\lambda'_D+\lambda_A}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_F}{\left(1-\frac{v}{c}\right)}+\lambda'_F\left(1-\frac{v}{c}\right)\right]\Rightarrow\bar{\lambda}=\frac{\lambda'_D+\lambda_A}{2}=\frac{\lambda_F}{2\left(1-\frac{v}{c}\right)}\left[1+\left(1-\frac{v}{c}\right)^2\right]$$

Achemos a diferença entre o comprimento de onda médio $\bar{\lambda}$ e o comprimento de onda emitido pelas fontes $\Delta\bar{\lambda}=\bar{\lambda}-\lambda_F$:

$$\Delta\bar{\lambda}=\bar{\lambda}-\lambda_F=\frac{\lambda_F}{2\left(1-\frac{v}{c}\right)}\left[1+\left(1-\frac{v}{c}\right)^2\right]-\lambda_F$$

$$\Delta\bar{\lambda}=\frac{\lambda_F}{2\left(1-\frac{v}{c}\right)}\left[1+\left(1-\frac{v}{c}\right)^2\right]-\lambda_F\frac{2\left(1-\frac{v}{c}\right)}{2\left(1-\frac{v}{c}\right)}$$

$$\Delta\bar{\lambda}=\frac{\lambda_F}{2\left(1-\frac{v}{c}\right)}\left[1+\left(1-\frac{v}{c}\right)^2-2\left(1-\frac{v}{c}\right)\right]$$

$$\Delta\bar{\lambda}=\frac{\lambda_F}{2\left(1-\frac{v}{c}\right)}\left[1+1-2\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}-2+2\frac{v}{c}\right]$$

$$\Delta\bar{\lambda}=\frac{1}{\left(1-\frac{v}{c}\right)}\frac{\lambda_F}{2}\frac{v^2}{c^2} \tag{10.4}$$

http://www.wbabin.net/physics/faraj7.htm

§10 Ives-Stilwell (continuação)

O efeito Doppler transversal para a Relatividade Ondulatória foi obtido no §2 do seguinte modo:

Se o observador O', que vê o observador O se deslocar com velocidade –v' no sentido negativo do eixo x', emite ondas de freqüência y' e velocidade c, então o observador O de acordo com 2.22 e $u'x'=-v'$ medirá ondas de freqüência y e velocidade c em um plano perpendicular ao deslocamento de O' dadas por

$$y=y'\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}} \tag{2.25}$$

Para $u'x'=-v'$ teremos $ux=zero$ e $\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}=1$ com isso podemos escrever a relação entre a freqüência transversal $y=y_t$ e a freqüência da fonte $y'=y'_F$ na forma

$$y_t=\frac{y'_F}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}} \tag{10.5}$$

Com $c=y_t\lambda_t=y'_F\lambda'_F$ obtemos a relação entre o comprimento de onda transversal λ_t e o comprimento de onda da fonte λ'_F

$$\lambda_t=\lambda'_F\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}} \tag{10.6}$$

A variação do comprimento de onda transversal em relação ao comprimento de onda da fonte é:

$$\Delta\lambda_t=\lambda_t-\lambda'_F=\lambda'_F\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}-\lambda'_F=\lambda'_F\left(\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}-1\right)\cong\lambda'_F\left(1+\frac{v^2}{2c^2}-1\right)\cong\frac{\lambda'_F}{2}\frac{v^2}{c^2} \tag{10.7}$$

que é o mesmo valor obtido na Teoria Especial da Relatividade.

Aplicando 10.7 em 10.4 obtemos

$$\Delta\bar{\lambda}=\frac{\Delta\lambda_t}{\left(1-\frac{v}{c}\right)} \qquad 10.8$$

Com as equações 10.2 e 10.3 podemos obter as relações 10.9, 10.10, e 10.11 a seguir descritas

$$\lambda_A=\lambda'_D\left(1-\frac{v}{c}\right)^2 \qquad 10.9$$

E desta obtemos a fórmula da velocidade $\frac{v}{c}=1-\sqrt{\frac{\lambda_A}{\lambda'_D}}$ 10.10

$$\lambda_F=\lambda'_F=\sqrt{\lambda_A\lambda'_D} \qquad 10.11$$

Aplicando 10.10 e 10.11 em 10.6 obtemos

$$\lambda_t=\sqrt{\lambda_A\lambda'_D}\sqrt{1+\left(1-\sqrt{\frac{\lambda_A}{\lambda'_D}}\right)^2} \qquad 10.12$$

De 10.8 e 10.12 concluímos que $\lambda_A\le\lambda_F\le\lambda_t\le\bar{\lambda}\le\lambda'_D$. 10.13

Assim com os valores de λ_A e λ'_D obtidos da experiência de Ives-Stiwell poderemos avaliar λ_t, λ_F, $\frac{v}{c}$ e concluir se existe ou não a deformação espacial prevista na Teoria Especial Da Relatividade.

§11 Transformação entre dois referenciais da potencia dos raios luminosos de uma fonte na Teoria da Relatividade Especial

A relação entre dois referenciais da potencia desenvolvida por uma força é escrita na Teoria Especial da Relatividade na seguinte forma:

$$\vec{F}'.\vec{u}'=\frac{\vec{F}.\vec{u}-vFx}{\left(1-ux\frac{v}{c^2}\right)} \qquad 11.1$$

A definição da componente da força ao longo do eixo x é:

$$Fx=\frac{dpx}{dt}=\frac{d(mux)}{dt}=\frac{dm}{dt}ux+m\frac{dux}{dt} \qquad 11.2$$

Para um raio luminoso o principio da constância da velocidade da luz, garante que a componente ux da velocidade da luz, também é constante ao longo do eixo x, por isso:

$\frac{x}{t}=\frac{dx}{dt}=ux=$ constante, demonstrando que em dois $\frac{dux}{dt}=zero$ e $Fx=\frac{dm}{dt}ux$ 11.3

A fórmula de energia é $E=mc^2$ de onde obtemos $\frac{dm}{dt}=\frac{1}{c^2}\frac{dE}{dt}$ 11.4

Da definição de energia temos $\frac{dE}{dt}=\vec{F}.\vec{u}$ que aplicando em 11.4 e 11.3 obtemos $Fx=\vec{F}.\vec{u}\frac{ux}{c^2}$ 11.5

Aplicando 11.5 em 11.1 temos:

$$\vec{F}'.\vec{u}'=\frac{\vec{F}.\vec{u}-v\left(\vec{F}.\vec{u}\right)\frac{ux}{c^2}}{\left(1-ux\frac{v}{c^2}\right)}$$

De onde encontramos que $\vec{F}'.\vec{u}' = \vec{F}.\vec{u}$ ou $\dfrac{dE'}{dt'} = \dfrac{dE}{dt}$ 11.6

Resultado igual a 5.3 da Relatividade Ondulatória que pode ser comprovado experimentalmente, considerando o Sol como fonte.

§12 Linearidade

A Teoria da Relatividade Ondulatória tem como axioma fundamental à exigência de que os referenciais inerciais sejam denominados exclusivamente como aqueles em que um raio de luz emitido em qualquer direção a partir da sua origem propague em linha reta, o que matematicamente é descrito pelas formulas (1.13, 1.18, 8.6 e 8.7) da Relatividade Ondulatória:

$$\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} = ux, \frac{y}{t} = \frac{dy}{dt} = uy, \frac{z}{t} = \frac{dz}{dt} = uz \qquad 1.13$$

$$\frac{x'}{t'} = \frac{dx'}{dt'} = u'x', \frac{y'}{t'} = \frac{dy'}{dt'} = u'y', \frac{z'}{t'} = \frac{dz'}{dt'} = u'z' \qquad 1.18$$

Woldemar Voigt em 1.887 escreveu a transformação linear entre os referenciais dos observadores O e O' na forma seguinte:

$$x = Ax' + Bt' \qquad 12.1$$

$$t = Ex' + Ft' \qquad 12.2$$

Com as respectivas equações inversas:

$$x' = \frac{F}{AF - BE}x + \frac{-B}{AF - BE}t \qquad 12.3$$

$$t' = \frac{-E}{AF - BE}x + \frac{A}{AF - BE}t \qquad 12.4$$

Onde A, B, E e F são constantes e devido á simetria não consideramos os termos com y, z e y', z'.

Sabemos que x e x' são as projeções de dois raios luminosos ct e ct' que propagam com velocidade constante c (devido o princípio da constância da velocidade da luz), emitidos em qualquer direção a partir da origem dos respectivos referenciais inerciais no instante em que as origens são coincidentes e no momento em que:

t = t' = zero 12.5

por isso na equação 12.2 no instante em que t' = zero devemos ter E = zero para termos também t = zero, não podemos exigir que quando t' = zero, seja também x' = zero, porque no caso da propagação ocorrer no plano y'z' teremos x' = zero mais $t' \neq zero$.

Reescrevamos as equações corrigidas (E = zero):

$$x = Ax' + Bt' \qquad 12.6$$

$$t = Ft' \qquad 12.7$$

Com as respectivas equações inversas:

$$x' = \frac{x}{A} - \frac{Bt}{AF} \qquad 12.8$$

$$t' = \frac{t}{F} \qquad 12.9$$

Para o caso da propagação ocorrer no plano y’ z’ temos x’ = zero e dividindo 12.6 por 12.7 temos:

$$\frac{x}{t}=\frac{B}{F}=v \qquad 12.10$$

onde v é o módulo da velocidade que o observador O vê o referencial do observador O’ se deslocar ao longo do eixo x no sentido positivo porque o sinal da equação é positivo.

Para o caso da propagação ocorrer no plano y z teremos x = zero e dividindo 12.8 por 12.9 temos:

$$\frac{x'}{t'}=-\frac{B}{A}=-v' \text{ ou } \frac{B}{A}=v' \qquad 12.11$$

onde v’ é o módulo da velocidade que o observador O’ vê o referencial do observador O se deslocar ao longo do eixo x’ no sentido negativo porque o sinal da equação é negativo.

A equação 1.6 descreve o princípio da constância da velocidade da luz, que deve ser atendido pelas equações 12.6 a 12.9:

$$x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2 \qquad 1.6$$

Aplicando 12.6 e 12.7 em 1.6 temos:

$$(Ax'+Bt')^2-c^2F^2t'^2=x'^2-c^2t'^2$$

De onde obtemos:

$$\left(A^2x'^2\right)-c^2t'^2\left[F^2-\frac{B^2}{c^2}-\frac{2ABx'}{c^2t'}\right]=x'^2-c^2t'^2$$

onde fazendo $A^2 = 1$ no parêntese em arco e $\left[F^2-\frac{B^2}{c^2}-\frac{2ABx'}{c^2t'}\right]=1$ no parêntese quadrado obtemos a igualdade entre ambos os lados do sinal de igual da equação.

Aplicando A = 1 em $\left[F^2-\frac{B^2}{c^2}-\frac{2ABx'}{c^2t'}\right]=1$ temos $F^2=1+\frac{B^2}{c^2}+\frac{2Bx'}{c^2t'}$ 12.12

Aplicando A = 1 em 12.11 temos $\frac{B}{A}=\frac{B}{1}=B=v'$ 12.11

Que aplicada em 12.12 fornece:

$$F=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'x'}{c^2t'}}=F(x',t') \qquad 12.12$$

sendo F(x’, t’) igual à função F dependente das variáveis x’ e t’.

Aplicando 12.8 e 12.9 em 1.6 temos:

$$x^2-c^2t^2=\left(\frac{x}{A}-\frac{Bt}{AF}\right)^2-c^2\frac{t}{F^2}^2$$

De onde obtemos:

$$x^2-c^2t^2=\left(\frac{x^2}{A^2}\right)-c^2t^2\left[\frac{1}{F^2}-\frac{B^2}{A^2c^2F^2}+\frac{2Bx}{A^2c^2Ft}\right]$$

onde fazendo $A^2 = 1$ no parêntese em arco e $\left[\frac{1}{F^2}-\frac{B^2}{A^2c^2F^2}+\frac{2Bx}{A^2c^2Ft}\right]=1$ no parêntese quadrado obtemos a igualdade entre ambos os lados do sinal de igual da equação.

Aplicando A = 1 e 12.10 em $\left[\frac{1}{F^2}-\frac{B^2}{A^2c^2F^2}+\frac{2Bx}{A^2c^2Ft}\right]=1$ obtemos:

$$F=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx}{c^2t}}}=F(x,t) \qquad 12.13$$

sendo F(x, t) igual a função F dependente das variáveis x e t.

Façamos as seguintes denominações de acordo com 2.5 e 2.6:

$$K'=1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'x'}{c^2t'}\Rightarrow F=\sqrt{K'} \qquad 12.14$$

$$K=1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx}{c^2t}\Rightarrow F=\frac{1}{\sqrt{K}} \qquad 12.15$$

Como a equação para F(x’, t’) de 12.12 e F(x, t) de 12.13 devem ser iguais temos:

$$F=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'x'}{c^2t'}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx}{c^2t}}} \qquad 12.16$$

Então:

$$\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx}{c^2t}}\cdot\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'x'}{c^2t'}}=1 \text{ ou } \sqrt{K}\cdot\sqrt{K'}=1 \qquad 12.17$$

Exatamente igual a 1.10.

Reescrevendo as equações 12.6, 12.7, 12.8 e 12.9 em função de v, v’ e F temos:

$$x=x'+v't' \qquad 12.6$$

$$t=Ft' \qquad 12.7$$

Com as respectivas equações inversas:

$$x'=x-vt \qquad 12.8$$

$$t'=\frac{t}{F} \qquad 12.9$$

Obteremos as equações 12.6, 12.7, 12.8 e 12.9 finais substituindo F pelas formulas correspondentes:

$$x=x'+v't' \qquad 12.6$$

$$t=t'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'x'}{c^2t'}} \qquad 12.7$$

Com as respectivas equações inversas:

$$x'=x-vt \qquad 12.8$$

$$t'=t\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx}{c^2t}} \qquad 12.9$$

Que são exatamente as equações do quadro I.

Como $v=\frac{B}{F}$ e $v'=B$ então as relação entre v e v' são $v=\frac{v'}{F}$ ou $v'=v.F$ 12.18

Vamos transformar F (12.12) função dos elementos v', x', e t' para F (12.13) função dos elementos v, x e t substituindo em 12.12 as equações 12.8, 12.9 e 12.18:

$$F=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'x'}{c^2t'}}=\sqrt{1+\frac{(vF)^2}{c^2}+\frac{2vF(x-vt)}{c^2\,\frac{t}{F}}}$$

$$F=\sqrt{1+\frac{v^2F^2}{c^2}+\frac{2vxF^2}{c^2t}-\frac{2v^2F^2}{c^2}}=\sqrt{1+\frac{2vxF^2}{c^2t}-\frac{v^2F^2}{c^2}}$$

$$F^2=1+\frac{2vxF^2}{c^2t}-\frac{v^2F^2}{c^2}\Rightarrow F^2+\frac{v^2F^2}{c^2}-\frac{2vxF^2}{c^2t}=1\Rightarrow F=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx}{c^2t}}}$$

Que é exatamente a equação 12.13.

Vamos transformar F (12.13) função dos elementos v, x, e t para F (12.12) função dos elementos v', x' e t' substituindo em 12.13 as equações 12.6, 12.7 e 12.18:

$$F=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx}{c^2t}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{v'}{F}\right)^2-\frac{2v'(x'+v't')}{c^2FFt'}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2F^2}-\frac{2v'x'}{c^2t'F^2}-\frac{2v'^2}{c^2F^2}}}$$

$$F=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2F'^2}-\frac{2v'x'}{c^2t'F'^2}}}\Rightarrow F^2\left(1-\frac{v'^2}{c^2F2}-\frac{2v'x'}{c^2t'F^2}\right)=1\Rightarrow F=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'x'}{c^2t'}}$$

Que é exatamente a equação 12.12.

Calculemos o diferencial total de F(x', t') (12.12):

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x'}dx'+\frac{\partial F}{\partial t'}dt'$$

como:

$$\frac{\partial F}{\partial x'}=\frac{1}{\sqrt{K'}}\frac{v'}{c^2t'} \text{ e } \frac{\partial F}{\partial t'}=-\frac{1}{\sqrt{K'}}\frac{v'}{c^2t'}\frac{x'}{t'} \qquad 12.19$$

temos:

$$dF=\frac{1}{\sqrt{K'}}\frac{v'}{c^2t'}dx'-\frac{1}{\sqrt{K'}}\frac{v'}{c^2t'}\frac{x'}{t'}dt' \qquad 12.20$$

onde aplicando 1.18 encontramos:

$$dF = \frac{1}{\sqrt{K'}}\frac{v'}{c^2t'}dx' - \frac{1}{\sqrt{K'}}\frac{v'}{c^2t'}\frac{dx'}{dt'}dt' = o$$

De onde concluímos que F função de x' e t' é uma constante.

Calculemos o diferencial total de F(x, t) (12.13):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt$$

como:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}}\frac{v}{c^2t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{K^{\frac{3}{2}}}\frac{v}{c^2t}\frac{x}{t} \qquad 12.21$$

temos:

$$dF = \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}}\frac{v}{c^2t}dx - \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}}\frac{v}{c^2t}\frac{x}{t}dt \qquad 12.22$$

onde aplicando 1.13 encontramos:

$$dF = \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}}\frac{v}{c^2t}dx - \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}}\frac{v}{c^2t}\frac{dx}{dt}dt = o$$

De onde concluímos que F função de x e t é uma constante.

As equações 1.13 e 1.18 representam para os observadores O e O' o princípio da constância da velocidade da luz, validas do infinitamente pequeno ao infinitamente grande e significam que na Relatividade Ondulatória o espaço e o tempo são simultaneamente medidos. Não devem ser interpretadas como uma dependência entre espaço e tempo.

O tempo tem uma interpretação própria que pode ser compreendida se analisarmos para um determinado observador a emissão de dois raios de luz a partir do instante t = zero. Se somarmos os tempos obtidos, para cada raio de luz obtemos um resultado sem qualquer utilidade para a física.

Se no instante t = t' = zero o observador O' emite dois raios de luz, um ao longo do eixo x e outro ao longo do eixo y, transcorrido o intervalo de tempo t' os raios atingem para o observador O' simultaneamente, os pontos A_x e A_y à distância ct' da origem, no entanto para o observador O os pontos não serão atingidos simultaneamente. Para que ambos os raios de luz sejam simultâneo aos observadores eles deverão atingir os pontos que possuam o mesmo raio em relação ao eixo x e que forneça os mesmos tempos para ambos os observadores ($t_1 = t_2$ e $t'_1 = t'_2$), o que significa que realmente somente um raio de luz é necessário para aferir o tempo entre os referenciais.
Conforme o § 1, ambos os referenciais dos observadores O e O' são inercial, sendo assim neles a luz propaga em linha reta conforme exige o axioma fundamental da Relatividade Ondulatória § 12, por isso a diferença entre as velocidades v e v' é devida somente a diferença de tempo entre os referenciais.

$v = \dfrac{x - x'}{t}$ 1.2 $\qquad v' = \dfrac{x - x'}{t'}$ 1.4

Também podemos relacionar um referencial inercial para o qual a luz propaga em linha reta conforme exige o axioma fundamental da Relatividade Ondulatória, com um referencial em movimento acelerado para o qual a luz propaga em linha curva, sendo que neste caso a diferença entre v e v' não é devida somente a diferença de tempo entre os referenciais.

Conforme o § 1, se o observador O no instante t = t' = zero emite um raio de luz a partir da origem do seu referencial, depois de transcorrido o intervalo de tempo t_1 o raio de luz atinge o ponto A_1 de coordenadas (x_1, y_1, z_1, t_1) à distância ct_1 da origem do observador O, então temos:

$$t'_1 = t_1\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx_1}{c^2t_1}}$$

Após atingir o ponto A_1 o raio de luz continua a propagar na mesma direção e no mesmo sentido, tendo transcorrido o intervalo de tempo t_2 o raio de luz atinge o ponto A_2 de coordenadas ($x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$, $z_1 + z_2$, $t_1 + t_2$) à distância ct_2 do ponto A_1, então temos:

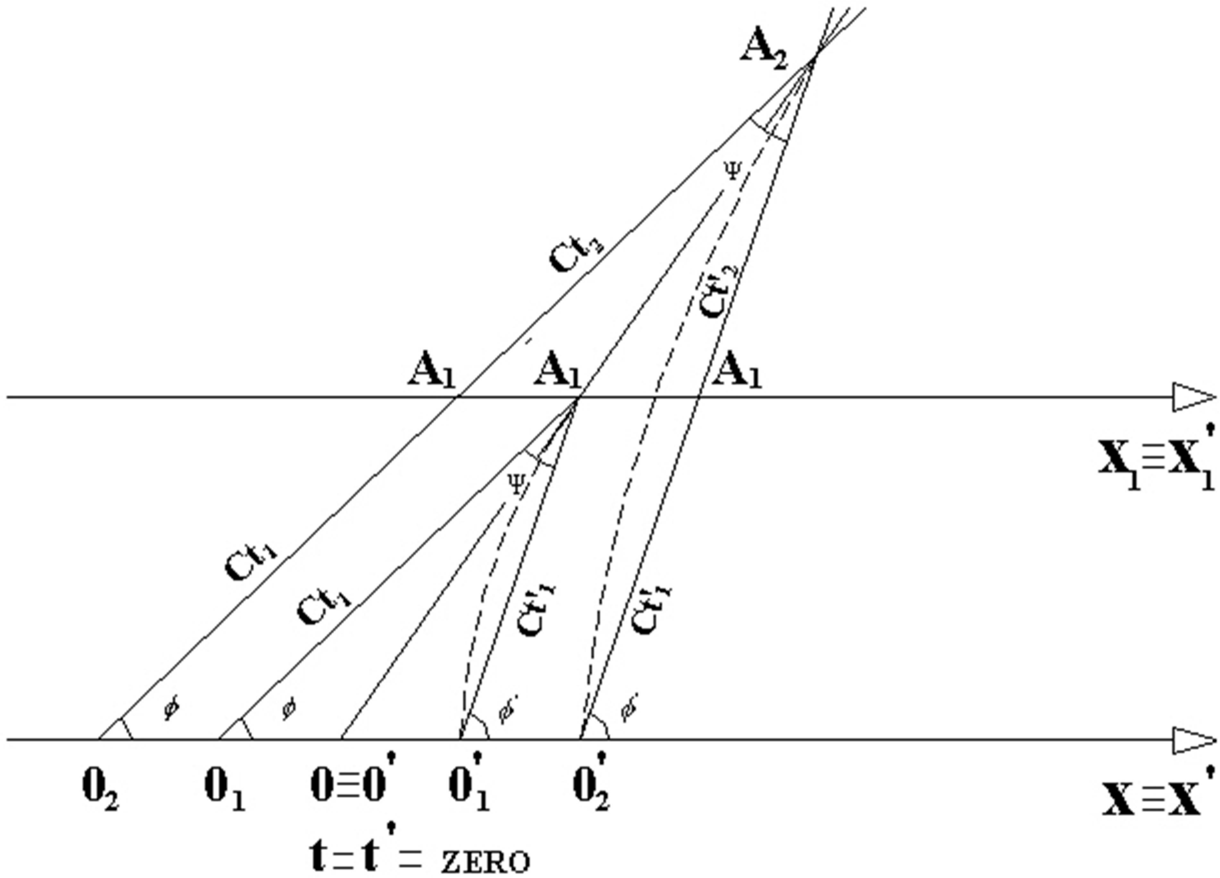
$$\frac{x}{t}=\frac{dx}{dt}=ux \Rightarrow \frac{x_1}{t_1}=\frac{x_2}{t_2}=ux \Rightarrow \sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx_1}{c^2t_1}}=\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx_2}{c^2t_2}}=\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}$$

e com isso obtemos:

$$t'_2=t_2\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx_2}{c^2t_2}}=t_2\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}$$

$$t'_1+t'_2=t_1\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx_1}{c^2t_1}}+t_2\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}=(t_1+t_2)\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}=(t_1+t_2)\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2v(x_1+x_2)}{c^2(t_1+t_2)}}$$

A geometria do espaço e tempo da Relatividade Ondulatória está resumida na figura abaixo que pode ser expandida para A_n pontos e vários observadores.



Na figura os ângulos têm a relação $\psi=\phi'-\phi$ e são iguais os seguintes segmentos:

O_1 a $O \equiv O'$ é igual a $O \equiv O'$ a O'_1 $\left(O_1 \leftrightarrow O'_1 = vt_1 = v't'_1\right)$

O_2 a O_1 é igual a O'_1 a O'_2 $\left(O_2 \leftrightarrow O'_2 = v(t_1+t_2) = v'(t'_1+t'_2) \rightarrow vt_2 = v't'_2 = O_2 \leftrightarrow O_1 + O'_1 \leftrightarrow O'_2\right)$

E são paralelos os seguintes seguimentos:

O_2 a A_2 é paralelo a O_1 a A_1

O'_2 a A_2 é paralelo a O'_1 a A_1

$X \equiv X'$ é paralelo a $X_1 \equiv X'_1$

O cosseno dos ângulos ϕ e ϕ' de inclinação dos raios para os observadores O e O' de acordo com 2.3 e 2.4 são:

$$u'x' = \frac{ux - v}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}} \Rightarrow \frac{u'x'}{c} = \frac{\frac{ux}{c}-\frac{v}{c}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}} \Rightarrow cos\phi' = \frac{cos\phi - v/c}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2v}{c}cos\phi}}$$

$$cos\phi' = \frac{cos\phi - v/c}{\sqrt{K}} \qquad 12.23$$

E com isso temos: $sen\phi' = \dfrac{sen\phi}{\sqrt{K}}$ 12.24

$$ux = \frac{u'x' + v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}} \Rightarrow \frac{ux}{c} = \frac{\frac{u'x'}{c}+\frac{v'}{c}}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}} \Rightarrow cos\phi = \frac{cos\phi' + v'/c}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'}{c}cos\phi'}}$$

$$cos\phi = \frac{cos\phi' + v'/c}{\sqrt{K'}} \qquad 12.25$$

E com isso temos: $sen\phi = \dfrac{sen\phi'}{\sqrt{K'}}$ 12.26

O cosseno do ângulo ψ de interseção dos raios é igual a:

$$cos\psi = \frac{1-\frac{vux}{c^2}}{\sqrt{K}} = \frac{1+\frac{v'u'x'}{c^2}}{\sqrt{K'}} = \frac{1-\frac{v}{c}cos\phi}{\sqrt{K}} = \frac{1+\frac{v'}{c}cos\phi'}{\sqrt{K'}} \qquad 12.27$$

E com isso temos: $sen\psi = \dfrac{v}{c}\dfrac{sen\phi}{\sqrt{K}} = \dfrac{v'}{c}\dfrac{sen\phi'}{\sqrt{K'}}$ 12.28

A invariância do $cos\,\psi$ demonstra a harmonia de todas as hipóteses adotadas para o espaço e tempo na Relatividade Ondulatória.

O $cos\,\psi$ é igual ao Jacobiano da transformação para o espaço e tempo do quadro I, onde os radicais

$\sqrt{K} = \sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vx}{c^2t}}$ e $\sqrt{K'} = \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'x'}{c^2t'}}$ são considerados variáveis e por isso derivados.

$$cos\psi = J = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial(x',y',z',t')}{\partial(x,y,z,t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0\,0 & -v \\ 0 & 1\,0 & 0 \\ 0 & 0\,1 & 0 \\ \frac{-v/c^2}{\sqrt{K}} & 0\,0 & \frac{1}{\sqrt{K}}\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{vx}{c^2t}\right) \end{vmatrix} = \frac{1-\frac{vx}{c^2t}}{\sqrt{K}} = \frac{1-\frac{vux}{c^2}}{\sqrt{K}} \qquad 8.8$$

$$cos\psi = J' = \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} = \frac{\partial(x,y,z,t)}{\partial(x',y',z',t')} = \begin{vmatrix} 1 & 0\,0 & v' \\ 0 & 1\,0 & 0 \\ 0 & 0\,1 & 0 \\ \frac{v'/c^2}{\sqrt{K'}} & 0\,0 & \frac{1}{\sqrt{K'}}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{v'x'}{c^2t'}\right) \end{vmatrix} = \frac{1+\frac{v'x'}{c^2t'}}{\sqrt{K'}} = \frac{1+\frac{v'u'x'}{c^2}}{\sqrt{K'}} \qquad 8.8$$

§13 Richard C. Tolman

O §4 Transformações dos Momentos da Relatividade Ondulatória, foi desenvolvido baseado na experiência idealizada por Lewis e Tolman, conforme referência [3]. Onde a colisão de duas esferas preservando o princípio de conservação da energia e o princípio de conservação dos momentos demonstra que a massa é função da própria velocidade de acordo com:

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{(u)^2}{c^2}}}$$

onde m_o é a massa da esfera quando em repouso e $u=|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\vec{u}}$ o módulo da sua velocidade.

Analisemos a colisão entre duas esferas idênticas quando em repouso relativo, que para o observador O' se denominam S'$_1$ e S'$_2$ e se deslocam ao longo do eixo x' em sentido contrário com as seguintes velocidades antes da colisão:

Tabela 1

Esfera S'$_1$	Esfera S'$_2$
$u'x'_1=v'$	$u'x_2'=-v'$
$u'y'_1=zero$	$u'y'_2=zero$
$u'z'_1=zero$	$u'z'_2=zero$

Para o observador O as mesmas esferas se denominam S$_1$ e S$_2$ e têm as velocidades $(ux_1,\ ux_2,\ uy_i=uz_i=zero)$ antes da colisão calculadas de acordo com o Quadro 2 da seguinte forma:

A velocidade ux_1 da esfera S$_1$ é igual a:

$$ux_1=\frac{u'x'_1+v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'_1}{c^2}}}=\frac{v'+v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'v'}{c^2}}}=\frac{2v'}{\sqrt{1+\frac{3v'^2}{c^2}}}.$$

A transformação de v' para v de acordo com 1.20 do Quadro 2 é:

$$v=\frac{v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'_1}{c^2}}}=\frac{v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'v'}{c^2}}}=\frac{v'}{\sqrt{1+\frac{3v'^2}{c^2}}}.$$

Que aplicada em ux_1 fornece:

$$ux_1=2\left(\frac{v'}{\sqrt{1+\frac{3v'^2}{c^2}}}\right)=2v$$

A velocidade ux_2 da esfera S$_2$ é igual a:

$$ux_2=\frac{u'x'_2+v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'_2}{c^2}}}=\frac{-v'+v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'(-v')}{c^2}}}=zero$$

Tabela 2

Esfera S$_1$	Esfera S$_2$
$ux_1=\frac{2v'}{\sqrt{1+\frac{3v'}{c^2}}}=2v$	$ux_2=zero$

$uy_1 = zero$	$uy_2 = zero$
$uz_1 = zero$	$uz_2 = zero$

Para os observadores O e O' as duas esferas possuem a mesma massa quando em repouso relativo. Sendo que para o observador O' as duas esferas colidem com velocidades de módulo igual e sentido oposto por isso os momentos $(p'_1 = p'_2)$ se anulam durante a colisão formando por um instante $(\Delta t')$ um único corpo de massa $m_0 = m'_1 + m'_2$.

De acordo com o princípio de conservação dos momentos para o observador O teremos que impor que os momentos antes da colisão são iguais aos momentos após a colisão, portanto:

$$m_1 ux_1 + m_2 ux_2 = (m_1 + m_2)w$$

Onde para o observador O, w é a velocidade arbitrária que supostamente por um instante (Δt) também verá as massas unidas $(m = m_1 + m_2)$ se deslocando. Como as massas m_i possuem velocidades diferentes e as massas variam de acordo com as próprias velocidades esta equação não pode ser simplificada algebricamente, sendo as variações das massas da seguinte forma:

Para o lado esquerdo do sinal de igual da equação temos:

$$u = ux_1 = 2v$$

$$m_1 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(ux_1)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(2v)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{4v^2}{c^2}}}$$

$$u = ux_2 = zero$$

$$m_2 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(ux_2)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(zero)^2}{c^2}}} = m_0$$

Para o lado direito do sinal de igual da equação temos:

$$u = w$$

$$m_1 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(w)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

$$m_2 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(w)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

Aplicando na equação de conservação dos momentos temos:

$$m_1 ux_1 + m_2 ux_2 = (m_1 + m_2)w = m_1 w + m_2 w$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{4v^2}{c^2}}} 2v + m_0 .0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} w + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} w$$

De onde obtemos:

$$\frac{2m_0v}{\sqrt{1-\frac{4v^2}{c^2}}}=\frac{2m_0w}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}\Rightarrow\frac{v}{\sqrt{1-\frac{4v^2}{c^2}}}=\frac{w}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}$$

$$w=\frac{v}{\sqrt{1-\frac{3v^2}{c^2}}}$$

Como $w\neq v$ para o observador O as massas unidas $(m=m_1+m_2)$ não se deslocariam momentaneamente solidárias ao observador O' o que é concebível se considerarmos que são diferentes os instantes $\Delta t\neq\Delta t'$ que supostamente as massas ficariam em repouso do ponto de vista de cada observador e que a massa incidente com velocidade 2v é maior do que a massa em repouso.
Se operássemos com as variáveis com linha teríamos:

$$m_1ux_1+m_2ux_2=(m_1+m_2)w=m_1w+m_2w$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{2v'}{\sqrt{1+\frac{3v'}{c^2}}}\right)^2}}\frac{2v'}{\sqrt{1+\frac{3v'}{c^2}}}+m_0.0=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}w+\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}w=\frac{2m_0w}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}$$

$$\frac{2m_0v'}{\sqrt{\left(1+\frac{3v'}{c^2}\right)\left(1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{4v'^2}{\left(1+\frac{3v'}{c^2}\right)}\right)\right)}}=\frac{2m_0w}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}$$

$$\frac{2m_0v'}{\sqrt{1+\frac{3v'}{c^2}-\frac{4v'^2}{c^2}}}=\frac{2m_0w}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}$$

$$\frac{2m_0v'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{2m_0w}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}$$

De onde concluímos que $w=v'$ o qual deve ser igual ao valor anterior de w ou seja:

$$w=v'=\frac{v}{\sqrt{1-\frac{3v^2}{c^2}}}$$

Relação entre v e v' que se obtém do Quadro 2 quando $ux_1=2v$ que corresponde para o observador O a velocidade da esfera incidente sobre a esfera em repouso.

§14 Composição de velocidades

Referência – Millennium Relativity

URL: http://www.mrelativity.net/MBriefs/VComp_Sci_Estab_Way.htm

Escrevamos as transformações de Hendrik A. Lorentz para espaço e tempo da Teoria Especial da Relatividade:

$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	14.1a	$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	14.3a
$y'=y$	14.1b	$y=y'$	14.3b

$z' = z$	14.1c	$z = z'$	14.3c
$t' = \dfrac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$	14.2	$t = \dfrac{t' + \dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$	14.4

Destas obtemos as equações de transformação de velocidade:

$u'x' = \dfrac{ux - v}{1 - \dfrac{vux}{c^2}}$	14.5a	$ux = \dfrac{u'x' + v}{1 + \dfrac{vu'x'}{c^2}}$	14.6a
$u'y' = \dfrac{uy\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{vux}{c^2}}$	14.5b	$uy = \dfrac{u'y'\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{vu'x'}{c^2}}$	14.6b
$u'z' = \dfrac{uz\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{vux}{c^2}}$	14.5c	$uz = \dfrac{u'z'\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{vu'x'}{c^2}}$	14.6c

Consideremos que em relação ao observador O’ um objeto se move com velocidade: $u'x' = 1{,}5.10^5\, km/s(= 0{,}50c)$.

E que a velocidade do observador O’ em relação ao observador O é:

$v = 1{,}5.10^5\, km/s(= 0{,}50c)$.

A velocidade ux do objeto em relação ao observador O deve ser calculada pela fórmula 14.6a:

$$ux = \frac{u'x' + v}{1 + \dfrac{vu'x'}{c^2}} = \frac{1{,}5.10^5 + 1{,}5.10^5}{1 + \dfrac{1{,}5.10^5 . 1{,}5.10^5}{\left(3{,}0.10^5\right)^2}} = 2{,}4.10^5\, km/s(= 0{,}80c).$$

Onde usamos $c = 3{,}0.10^5\, km/s(= 1{,}00c)$.

Considerando que o objeto se movimentou durante um segundo em relação ao observador O $(t = 1{,}00s)$ podemos então com 14.2 calcular o tempo transcorrido para o observador O’:

$$t' = \frac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{t\left(1 - \dfrac{vux}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1{,}00\left(1 - \dfrac{1{,}5.10^5 . 2{,}4.10^5}{\left(3{,}0.10^5\right)^2}\right)}{\sqrt{1 - \dfrac{\left(1{,}5.10^5\right)^2}{\left(3{,}0.10^5\right)^2}}} = \frac{0{,}60}{\sqrt{0{,}75}} \Rightarrow t' = 0{,}693s.$$

Para o observador O o observador O’ está à distância d dada pela fórmula:

$d = vt = 1{,}5.10^5 . 1{,}00 = 1{,}5.10^5\, km$.

Para o observador O’ o observador O está à distância d’ dada pela fórmula:

$d' = vt' = 1{,}5.10^{5.} \dfrac{0{,}60}{\sqrt{0{,}75}} = 1{,}03923.10^5\, km$.

À distância do objeto $(d_O,\ d'_O)$ em relação aos observadores O e O’ é dada pelas fórmulas:

$d_O = uxt = 2{,}4.10^5.1{,}00 = 2{,}4.10^5\,km$.

$$d_o = uxt = \frac{(u'x'+v)t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\left(1{,}5.10^5+1{,}5.10^5\right)}{\sqrt{1-\frac{\left(1{,}5.10^5\right)^2}{\left(3{,}0.10^5\right)^2}}}\frac{0{,}60}{\sqrt{0{,}75}} = 2{,}40.10^5\,km.$$

$$d'_O = u'x't' = 1{,}5.10^5.\frac{0{,}60}{\sqrt{0{,}75}} = 1{,}03923.10^5\,km.$$

$$d'_o = u'x't' = \frac{(ux-v)t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\left(2{,}4.10^5-1{,}5.10^5\right)1{,}00}{\sqrt{1-\frac{\left(1{,}5.10^5\right)^2}{\left(3{,}0.10^5\right)^2}}} = 1{,}03923.10^5\,km.$$

Para o observador O à distância entre o objeto e o Observador O' é dada pela fórmula:

$\Delta d = d_O - d = 2{,}4.10^5 - 1{,}5.10^5 = 0{,}90.10^5\,km$.

Para o observador O a velocidade do objeto em relação ao observador O' é dada por:
$\frac{\Delta d}{t} = \frac{0{,}90.10^5\,km}{1{,}00s} = 0{,}90.10^5\,km/s(=0{,}30c)$.

Relacionar os tempos t e t' utilizando a fórmula $t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ só e possível única e exclusivamente quando $ux = v$ e $u'x' = zero$ o que não é o caso acima, para entendermos isso escreva as equações 14.2 e 14.4 na forma abaixo:

$t' = \frac{t\left(1-\frac{v}{c}cos\phi\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	14.2	$t = \frac{t'\left(1+\frac{v}{c}cos\phi'\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	14.4

Onde $cos\phi = \frac{x}{ct}$ e $cos\phi' = \frac{x'}{ct'}$.

As equações acima podem ser escritas como:

$t' = f(t,\phi)$ e $t = f'(t',\phi')$ 14.7

Em cada referencial dos observadores O e O' a propagação da luz gera uma esfera de raio ct e ct' que se interceptam formando uma circunferência que propaga com velocidade c. Os raio ct e ct' e o sentido positivo dos eixos x e x' formam os ângulos ϕ e ϕ' constantes entre os referenciais. Se para o mesmo par de referencial os ângulos fossem variáveis os tempos seriam aleatórios e se tornaria inútil para a física. Na equação $t' = f(t,\phi)$ temos t' função igualmente de t e ϕ, se nesta tivermos ϕ constante e t' variar devido a t obtemos a relação comum entre os tempos t e t' entre dois referenciais, entretanto se tivermos t constante e t' variar devido a ϕ teremos para cada valor de ϕ um valor de t' e t entre dois diferentes referenciais, esta analise também vale para $t = f'(t',\phi')$.

Dividindo 14.5a por c obtemos:

$$\frac{u'x'}{c} = \frac{\frac{ux}{c}-\frac{v}{c}}{1-\frac{vux}{c^2}} \Rightarrow cos\phi' = \frac{cos\phi-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}cos\phi}. \qquad 14.8$$

Onde $cos\phi = \frac{x}{ct} = \frac{ux}{c}$ e $cos\phi' = \frac{x'}{ct'} = \frac{u'x'}{c}$.

Isolando a velocidade obtemos:

$$\frac{v}{c}=\frac{(cos\phi - cos\phi')}{(1-cos\phi cos\phi')} \qquad \text{ou} \qquad v=\frac{ux-u'x'}{1-\frac{uxu'x'}{c^2}} \tag{14.9}$$

De onde concluímos que devemos ter os ângulos ϕ e ϕ' constantes para obtermos a mesma velocidade entre os referenciais.

A exigência dos ângulos constantes entre os referenciais deve resolver as controvérsias de Herbert Dingle.

§15 Invariância

As transformações para o espaço e tempo do quadro I, conjunto 1.2 mais 1.7, na forma matricial se escreve:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \tag{15.1}$$

Que escritas na forma abaixo representam as mesmas transformações de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix} \tag{15.2}$$

Que denominaremos como:

$$x'=x'^i=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ cx'^4 \end{bmatrix}, \quad \alpha=\alpha_{ij}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix}, \quad x=x^j=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ cx^4 \end{bmatrix} \tag{15.3}$$

Que são as funções $x'^i=x'^i(x^j)=x'^i(x^1,x^2,x^3,cx^4)=x'^i(x,y,z,ct)$ 15.4

Que na forma simbólica se escreve:

$x'=\alpha\,.\,x$ ou na forma indexada $x'^i=\sum_{j=1}^{4}\alpha_{ij}x^j \Rightarrow x'^i=\alpha_{ij}x^j$ 15.5

Onde utilizamos a convenção da soma de Einstein.

As transformações para o espaço e tempo do quadro I, conjunto 1.4 mais 1.8, na forma matricial se escreve:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} \tag{15.6}$$

Que escritas na forma abaixo representam as mesmas transformações de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix} \tag{15.7}$$

Que denominaremos como:

$$x=x^k=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ cx^4 \end{bmatrix}, \quad \alpha'=\alpha'_{kl}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix}, \quad x'=x'^l=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ cx'^4 \end{bmatrix} \tag{15.8}$$

Que são as funções $x^k = x^k\left(x'^l\right) = x^k\left(x'^1, x'^2, x'^3, cx'^4\right) = x^k\left(x', y', z', ct'\right)$ 15.9

Que na forma simbólica se escreve:

$x = \alpha'.x'$ ou na forma indexada $x^k = \sum_{l=1}^{4} \alpha'_{kl}\, x'^l \Rightarrow x^k = \alpha'_{kl}\, x'^l$ 15.10

Sendo $\sqrt{K} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx^1}{c^2 x^4}}$ (1.7), $\sqrt{K'} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'^1}{c^2 x'^4}}$ (1.8) e $\sqrt{K}.\sqrt{K'} = 1$ (1.10).

As matrizes de transformação $\alpha = \alpha_{ij}$ e $\alpha' = \alpha'_{kl}$ têm as propriedades:

$$\alpha.\alpha' = \alpha_{ij}\alpha'_{kl} = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij}\alpha'_{jl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I = \delta_l^i \qquad 15.11$$

$$\alpha^t \alpha'^t = \alpha_{ji}\alpha'_{lk} = \sum_{i=1}^{4} \alpha_{ji}\alpha'_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v/c & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v'/c & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I = \delta_k^j \qquad 15.12$$

Onde $\alpha^t = \alpha_{ji}$ é a matriz transposta de $\alpha = \alpha_{ij}$ e $\alpha'^t = \alpha'_{lk}$ é a matriz transposta de $\alpha' = \alpha'_{kl}$ e δ é o Delta de Kronecker.

$$\alpha'.\alpha = \alpha'_{kl}\,\alpha_{ij} = \sum_{l=1}^{4} \alpha'_{kl}\,\alpha_{lj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I = \delta_j^k \qquad 15.13$$

$$\alpha'^t \alpha^t = \alpha'_{lk}\,\alpha_{ji} = \sum_{k=1}^{4} \alpha'_{lk}\,\alpha_{ki} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v'/c & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v/c & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I = \delta_i^l \qquad 15.14$$

Onde $\alpha'^t = \alpha'_{lk}$ é a matriz transposta de $\alpha' = \alpha'_{kl}$ e $\alpha^t = \alpha_{ji}$ é a matriz transposta de $\alpha = \alpha_{ij}$ e δ é o Delta de Kronecker.

Observação as matrizes α_{ij} e α'_{kl} são inversas uma da outra, mas não são ortogonais, ou seja: $\alpha_{ji} \neq \alpha'_{kl}$ e $\alpha_{ij} \neq \alpha'_{lk}$.

As derivadas parciais $\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$ do diferencial total $dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j$ das componentes das coordenadas que se relacionam de acordo com $x'^i = x'^i\left(x^j\right)$, onde na matriz de transformação $\alpha = \alpha_{ij}$ o radical $\sqrt{K}$ é considerado constante é igual a:

Quadro 10, derivadas parciais das componentes das coordenadas:

$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^1}{\partial x^j} =$	$\frac{\partial x'^1}{\partial x^1} = 1$	$\frac{\partial x'^1}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial x'^1}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial x'^1}{\partial x^4} = -\frac{v}{c}$
$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^2}{\partial x^j} =$	$\frac{\partial x'^2}{\partial x^1} = 0$	$\frac{\partial x'^2}{\partial x^2} = 1$	$\frac{\partial x'^2}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial x'^2}{\partial x^4} = 0$
$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^3}{\partial x^j} =$	$\frac{\partial x'^3}{\partial x^1} = 0$	$\frac{\partial x'^3}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial x'^3}{\partial x^3} = 1$	$\frac{\partial x'^3}{\partial x^4} = 0$
$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^4}{\partial x^j} =$	$\frac{\partial x'^4}{\partial x^1} = 0$	$\frac{\partial x'^4}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial x'^4}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial x'^4}{\partial x^4} = \sqrt{K}$

O diferencial total das coordenadas na forma de matriz é igual a:

$$\begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \qquad 15.15$$

Que denominaremos como:

$$dx' = dx'^i = \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix}, \quad A = A^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix}, \quad dx = dx^j = \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \qquad 15.16$$

Então temos $dx' = Adx \Rightarrow dx'^i = \sum_{j=1}^{4} A^i_j dx^j \Rightarrow dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j$ 15.17

As derivadas parciais $\frac{\partial x^k}{\partial x'^l}$ do diferencial total $dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} dx'^l$ das componentes das coordenadas que se relacionam de acordo com $x^k = x^k\left(x'^l\right)$, onde na matriz de transformação $\alpha' = \alpha'_{kl}$ o radical $\sqrt{K'}$ é considerado constante é igual a:

Quadro 11 derivadas parciais das componentes das coordenadas:

$\frac{\partial x^k}{\partial x'^l} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^l} =$	$\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} = 1$	$\frac{\partial x^1}{\partial x'^2} = 0$	$\frac{\partial x^1}{\partial x'^3} = 0$	$\frac{\partial x^1}{\partial x'^4} = \frac{v'}{c}$
$\frac{\partial x^k}{\partial x'^l} = \frac{\partial x^2}{\partial x'^l} =$	$\frac{\partial x^2}{\partial x'^1} = 0$	$\frac{\partial x^2}{\partial x'^2} = 1$	$\frac{\partial x^2}{\partial x'^3} = 0$	$\frac{\partial x^2}{\partial x'^4} = 0$
$\frac{\partial x^k}{\partial x'^l} = \frac{\partial x^3}{\partial x'^l} =$	$\frac{\partial x^3}{\partial x'^1} = 0$	$\frac{\partial x^3}{\partial x'^2} = 0$	$\frac{\partial x^3}{\partial x'^3} = 1$	$\frac{\partial x^3}{\partial x'^4} = 0$
$\frac{\partial x^k}{\partial x'^l} = \frac{\partial x^4}{\partial x'^l} =$	$\frac{\partial x^4}{\partial x'^1} = 0$	$\frac{\partial x^4}{\partial x'^2} = 0$	$\frac{\partial x^4}{\partial x'^3} = 0$	$\frac{\partial x^4}{\partial x'^4} = \sqrt{K'}$

O diferencial total das coordenadas na forma de matriz é igual a:

$$\begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \qquad 15.18$$

Que denominaremos como:

$$dx = dx^k = \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix}, \quad A' = A'^k_l = \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix}, \quad dx' = dx'^l = \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \qquad 15.19$$

Então temos: $dx = A'dx' \Rightarrow dx^k = \sum_{l=1}^{4} A'^k_l \, dx'^l \Rightarrow dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} dx'^l$ 15.20

Os Jacobianos das transformações 15.15 e 15.18 são:

$$J = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial\left(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4\right)}{\partial\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{vmatrix} = \sqrt{K} \qquad 15.21$$

$$J' = \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} = \frac{\partial\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)}{\partial\left(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4\right)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{vmatrix} = \sqrt{K'} \qquad 15.22$$

Onde $\sqrt{K} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux^1}{c^2}}$ (2.5), $\sqrt{K'} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'^1}{c^2}}$ (2.6) e $\sqrt{K}.\sqrt{K'} = 1$ (1.23).

As matrizes de transformação A e A' também possuem as propriedades 15.11, 15.12, 15.13 e 15.14 das matrizes α e α'.

Da função $\phi = \phi\left(x^k\right) = \phi' = \phi'\left[x^k\left(x'^l\right)\right]$ onde as coordenadas se relacionam na forma $x^k = x^k\left(x'^l\right)$ temos

$\frac{\partial \phi}{\partial x'^l} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^l}$ descrito como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^1} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^1} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} + \frac{\partial \phi}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^1} + \frac{\partial \phi}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x'^1} + \frac{\partial \phi}{\partial x^4}\frac{\partial x^4}{\partial x'^1}$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^2} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^2} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x'^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x^4}\frac{\partial x^4}{\partial x'^2}$$
$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'^3} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^3} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^3} + \frac{\partial \phi}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^3} + \frac{\partial \phi}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x'^3} + \frac{\partial \phi}{\partial x^4}\frac{\partial x^4}{\partial x'^3}$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^4} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^4} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^4} + \frac{\partial \phi}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^4} + \frac{\partial \phi}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial x'^4} + \frac{\partial \phi'}{\partial x^4}\frac{\partial x^4}{\partial x'^4}$$

Que na forma matricial e sem apresentar a função ϕ se torna:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^l} = \left[\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^2}\frac{\partial}{\partial x'^3}\frac{\partial}{\partial x'^4}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x^4}\right]\begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} = 1 & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} = 0 & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} = 0 & \frac{\partial x^1}{\partial x'^4} = v' \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} = 0 & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} = 1 & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} = 0 & \frac{\partial x^2}{\partial x'^4} = 0 \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} = 0 & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} = 0 & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} = 1 & \frac{\partial x^3}{\partial x'^4} = 0 \\ \frac{\partial x^4}{\partial x'^1} = \frac{v'}{c^2\sqrt{K'}} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^2} = 0 & \frac{\partial x^4}{\partial x'^3} = 0 & \frac{\partial x^4}{\partial x'^4} = \frac{1}{\sqrt{K'}}\left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v'u'x'^1}{c^2}\right) \end{bmatrix}$$

Onde substituindo os itens abaixo:

$$\frac{\partial x^4}{\partial x'^1} = \frac{v'}{c^2\sqrt{K'}} = \frac{v}{c^2}$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial x'^4} = v' = \frac{v}{\sqrt{K}}$$

$$\frac{\partial x^4}{\partial x'^4} = \frac{1}{\sqrt{K'}}\left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v'u'x'^1}{c^2}\right) = \frac{\partial x'^4}{\partial x^4} = \frac{1}{\sqrt{K}}\left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vux^1}{c^2}\right)$$

Observação: está ultima relação demonstra que o tempo varia de forma igual entre os referenciais.

Obtemos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'^1}=\left[\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^2}\frac{\partial}{\partial x'^3}\frac{\partial}{\partial x'^4}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x^4}\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}=1 & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}=0 & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3}=0 & \frac{\partial x^1}{\partial x'^4}=\frac{v}{\sqrt{K}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}=0 & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}=1 & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3}=0 & \frac{\partial x^2}{\partial x'^4}=0 \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1}=0 & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2}=0 & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3}=1 & \frac{\partial x^3}{\partial x'^4}=0 \\ \frac{\partial x^4}{\partial x'^1}=\frac{v}{c^2} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^2}=0 & \frac{\partial x^4}{\partial x'^3}=0 & \frac{\partial x^4}{\partial x'^4}=\frac{1}{\sqrt{K}}\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{vux^1}{c^2}\right)\end{bmatrix}$$

Que é o conjunto 8.1 mais 8.3 do quadro 9, operadores diferenciais, na forma de matriz.

Da função $\phi'=\phi'(x'^i)=\phi=\phi[x'^i(x^j)]$ onde as coordenadas se relacionam na forma $x'^i=x'^i(x^j)$ temos:

$\frac{\partial\phi'}{\partial x^j}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$ descrito como:

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x^1}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^1}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'^1}\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^2}\frac{\partial x'^2}{\partial x^1}+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^3}\frac{\partial x'^3}{\partial x^1}+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^4}\frac{\partial x'^4}{\partial x^1}$$
$$\frac{\partial\phi'}{\partial x^2}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^2}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'^1}\frac{\partial x'^1}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^2}\frac{\partial x'^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^3}\frac{\partial x'^3}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^4}\frac{\partial x'^4}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial\phi'}{\partial x^3}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^3}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'^1}\frac{\partial x'^1}{\partial x^3}+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^2}\frac{\partial x'^2}{\partial x^3}+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^3}\frac{\partial x'^3}{\partial x^3}+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^4}\frac{\partial x'^4}{\partial x^3}$$
$$\frac{\partial\phi'}{\partial x^4}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^4}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'^1}\frac{\partial x'^1}{\partial x^4}+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^2}\frac{\partial x'^2}{\partial x^4}+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^3}\frac{\partial x'^3}{\partial x^4}+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^4}\frac{\partial x'^4}{\partial x^4}$$

Que na forma matricial e sem apresentar a função ϕ se torna:

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x^j}=\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x^4}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^2}\frac{\partial}{\partial x'^3}\frac{\partial}{\partial x'^4}\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}=1 & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2}=0 & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3}=0 & \frac{\partial x'^1}{\partial x^4}=-v \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1}=0 & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2}=1 & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3}=0 & \frac{\partial x'^2}{\partial x^4}=0 \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^1}=0 & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2}=0 & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3}=1 & \frac{\partial x'^3}{\partial x^4}=0 \\ \frac{\partial x'^4}{\partial x^1}=\frac{-v}{c^2\sqrt{K}} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^2}=0 & \frac{\partial x'^4}{\partial x^3}=0 & \frac{\partial x'^4}{\partial x^4}=\frac{1}{\sqrt{K}}\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{vux^1}{c^2}\right)\end{bmatrix}$$

Onde substituindo os itens abaixo:

$$\frac{\partial x'^1}{\partial x^4}=-v=\frac{-v'}{\sqrt{K'}}$$

$$\frac{\partial x'^4}{\partial x^1}=\frac{-v}{c^2\sqrt{K}}=\frac{-v'}{c^2}$$

$$\frac{\partial x'^4}{\partial x^4}=\frac{1}{\sqrt{K}}\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{vux^1}{c^2}\right)=\frac{\partial x^4}{\partial x'^4}=\frac{1}{\sqrt{K'}}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{v'u'x'^1}{c^2}\right)$$

Observação: está ultima relação demonstra que o tempo varia de forma igual entre os referenciais.

Obtemos:

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x^j}=\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x^4}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^2}\frac{\partial}{\partial x'^3}\frac{\partial}{\partial x'^4}\right]\begin{bmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1}=1 & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2}=0 & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3}=0 & \frac{\partial x'^1}{\partial x^4}=-\frac{v'}{\sqrt{K'}} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1}=0 & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2}=1 & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3}=0 & \frac{\partial x'^2}{\partial x^4}=0 \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^1}=0 & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2}=0 & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3}=1 & \frac{\partial x'^3}{\partial x^4}=0 \\ \frac{\partial x'^4}{\partial x^1}=\frac{-v'}{c^2} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^2}=0 & \frac{\partial x'^4}{\partial x^3}=0 & \frac{\partial x'^4}{\partial x^4}=\frac{1}{\sqrt{K'}}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{v'u'x'^1}{c^2}\right) \end{bmatrix}$$

Que é o conjunto 8.2 mais 8.4 do quadro 9, operadores diferenciais, na forma de matriz.

Aplicando 8.5 em 8.3 e em 8.4 simplificamos estás equações na forma seguinte:

Quadro 9B, operadores diferenciais com as equações 8.3 e 8.4 simplificadas:

$\frac{\partial}{\partial x'^1}=\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^4}$	8.1	$\frac{\partial}{\partial x^1}=\frac{\partial}{\partial x'^1}-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}$	8.2
$\frac{\partial}{\partial x'^2}=\frac{\partial}{\partial x^2}$	8.1.1	$\frac{\partial}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x'^2}$	8.2.1
$\frac{\partial}{\partial x'^3}=\frac{\partial}{\partial x^3}$	8.1.2	$\frac{\partial}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x'^3}$	8.2.2
$\frac{-\partial}{c\partial x'^4}=\sqrt{K}\frac{-\partial}{c\partial x^4}$	8.3B	$\frac{-\partial}{c\partial x^4}=\sqrt{K'}\frac{-\partial}{c\partial x'^4}$	8.4B
$\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{ux^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^4}=zero$	8.5	$\frac{\partial}{\partial x'^1}+\frac{u'x'^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}=zero$	8.5

O quadro 9B, na forma matricial fica:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^2}\frac{\partial}{\partial x'^3}\frac{-\partial}{c\partial x'^4}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{-\partial}{c\partial x^4}\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v/c & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \qquad 15.23$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{-\partial}{c\partial x^4}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^2}\frac{\partial}{\partial x'^3}\frac{-\partial}{c\partial x'^4}\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v'/c & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \qquad 15.24$$

As matrizes quadradas das transformações acima são as transpostas das matrizes A e A'.

Invariância do Diferencial Total

No referencial do observador O o diferencial total de uma função $\phi(x^k)$ é igual a:

$$d\phi(x^k)=\frac{\partial\phi}{\partial x^k}dx^k=\frac{\partial\phi}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial\phi}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial\phi}{\partial x^3}dx^3+\frac{\partial\phi}{\partial x^4}dx^4=\left[\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\frac{\partial\phi}{c\partial x^4}\right]\begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \qquad 15.25$$

Onde as coordenadas se relacionam com as do referencial do observador O' de acordo com $x^k=x^k(x'^l)$, substituindo as transformações 15.24 e 15.18 e sem apresentar a função ϕ obtemos:

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^k}dx^k=\left[\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^2}\frac{\partial}{\partial x'^3}\frac{\partial}{c\partial x'^4}\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v'/c & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \qquad 15.26$$

O produto das matrizes do meio fornece:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0\,0 & 0 \\ 0 & 1\,0 & 0 \\ 0 & 0\,1 & 0 \\ -v'/c & 0\,0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\,0\,0 & v'/c \\ 0\,1\,0 & 0 \\ 0\,0\,1 & 0 \\ 0\,0\,0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\,0 & v'/c \\ 0 & 1\,0 & 0 \\ 0 & 0\,1 & 0 \\ -v'/c & 0\,0 & 1+\dfrac{2v'dx'^1}{c^2dx'^4} \end{bmatrix} \qquad 15.27$$

Resultado que pode ser dividido em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0\,0 & v'/c \\ 0 & 1\,0 & 0 \\ 0 & 0\,1 & 0 \\ -v'/c & 0\,0 & 1+\dfrac{2v'dx'^1}{c^2dx'^4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0\,0 & v'/c \\ 0 & 0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,0 & 0 \\ -v'/c & 0\,0 & \dfrac{2v'dx'^1}{c^2dx'^4} \end{bmatrix} \qquad 15.28$$

Que aplicadas no diferencial total fornece:

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^k}dx^k=\left[\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^2}\frac{\partial}{\partial x'^3}\frac{\partial}{c\partial x'^4}\right]\left[\begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0\,0 & v'/c \\ 0 & 0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,0 & 0 \\ -v'/c & 0\,0 & \dfrac{2v'dx'^1}{c^2dx'^4} \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \qquad 15.29$$

Efetuando as operações do segundo termo encontramos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^2}\frac{\partial}{\partial x'^3}\frac{\partial}{c\partial x'^4}\right]\begin{bmatrix} 0 & 0\,0 & v'/c \\ 0 & 0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,0 & 0 \\ -v'/c & 0\,0 & \dfrac{2v'dx'^1}{c^2dx'^4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix}=-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}dx'^1+v'\frac{\partial}{\partial x'^1}dx'^4+\frac{2v'}{c^2}\frac{dx'^1}{dx'^4}\frac{\partial}{\partial x'^4}dx'^4$$

Onde aplicando 8.5 obtemos:

$$-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}dx'^1+v'\left(-\frac{1}{c^2}\frac{dx'^1}{dx'^4}\frac{\partial}{\partial x'^4}\right)dx'^4+\frac{2v'}{c^2}\frac{dx'^1}{dx'^4}\frac{\partial}{\partial x'^4}dx'^4=zero$$

Então temos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^2}\frac{\partial}{\partial x'^3}\frac{\partial}{c\partial x'^4}\right]\begin{bmatrix} 0 & 0\,0 & v'/c \\ 0 & 0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,0 & 0 \\ -v'/c & 0\,0 & \dfrac{2v'dx'^1}{c^2dx'^4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix}=zero \qquad 15.30$$

Com esse resultado obtemos em 15.29 a invariância do diferencial total:

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^k}dx^k=\left[\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^2}\frac{\partial}{\partial x'^3}\frac{\partial}{c\partial x'^4}\right]\begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix}=\frac{\partial\phi'}{\partial x'^l}dx'^l=d\phi' \qquad 15.31$$

No referencial do observador O' o diferencial total de uma função $\phi(x'^i)$ é igual a:

$$d\phi'(x'^i)=\frac{\partial\phi'}{\partial x'^i}dx'^i=\frac{\partial\phi'}{\partial x'^1}dx'^1+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^2}dx'^2+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^3}dx'^3+\frac{\partial\phi'}{\partial x'^4}dx'^4=\left[\frac{\partial\phi'}{\partial x'^1}\frac{\partial\phi'}{\partial x'^2}\frac{\partial\phi'}{\partial x'^3}\frac{\partial\phi'}{c\partial x'^4}\right]\begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \qquad 15.32$$

Onde as coordenadas se relacionam com as do referencial do observador O de acordo com $x'^i=x'^i(x^j)$, Substituindo as transformações 15.23 e 15.15 e sem apresentar a função ϕ obtemos:

$$d\phi' = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^i} dx'^i = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{c\partial x^4} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \qquad 15.33$$

O produto das matrizes do meio fornece:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & 1 - \frac{2vdx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \qquad 15.34$$

Resultado que pode ser dividido em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & 1 - \frac{2vdx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & -\frac{2vdx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \qquad 15.35$$

Que aplicadas no diferencial total fornece:

$$d\phi' = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^i} dx'^i = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{c\partial x^4} \right] \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & -\frac{2vdx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \qquad 15.36$$

Efetuando as operações do segundo termo encontramos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{c\partial x^4} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & -\frac{2vdx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} = \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} dx^1 - v \frac{\partial}{\partial x^1} dx^4 - \frac{2v}{c^2} \frac{dx^1}{dx^4} \frac{\partial}{\partial x^4} dx^4$$

Onde aplicando 8.5 obtemos:

$$\frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} dx^1 - v \left(-\frac{1}{c^2} \frac{dx^1}{dx^4} \frac{\partial}{\partial x^4} \right) dx^4 - \frac{2v}{c^2} \frac{dx^1}{dx^4} \frac{\partial}{\partial x^4} dx^4 = zero$$

Então temos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{c\partial x^4} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & -\frac{2vdx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} = zero \qquad 15.37$$

Com esse resultado obtemos em 15.36 a invariância do diferencial total:

$$d\phi' = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^i} dx'^i = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{c\partial x^4} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} dx^j = d\phi \qquad 15.38$$

Invariância da Equação de Onda

A equação de onda para o observador O é igual a:

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\left(x^4\right)^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial\left(x^1\right)^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\left(x^2\right)^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\left(x^3\right)^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\left(x^4\right)^2}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}&\frac{\partial}{\partial x^2}&\frac{\partial}{\partial x^3}&\frac{\partial}{c\partial x^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial^1}{\partial x^1}\\\frac{\partial}{\partial x^2}\\\frac{\partial}{\partial x^3}\\\frac{\partial}{c\partial x^4}\end{bmatrix}=0 \qquad 15.39$$

Onde aplicando 15.24 e a transposta de 15.24 temos:

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\left(x^4\right)^2}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1}&\frac{\partial}{\partial x'^2}&\frac{\partial}{\partial x'^3}&\frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{-v'}{c}&0&0&\sqrt{K'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{-v'}{c}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\sqrt{K'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1}\\\frac{\partial}{\partial x'^2}\\\frac{\partial}{\partial x'^3}\\\frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}=0 \qquad 15.40$$

O produto das três matrizes do meio fornece:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{-v'}{c}&0&0&\sqrt{K'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{-v'}{c}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\sqrt{K'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{-v'}{c}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{-v'}{c}&0&0&-1\frac{-2v'u'x'^1}{c^2}\end{bmatrix} \qquad 15.41$$

Resultado que pode ser dividido em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{-v'}{c}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{-v'}{c}&0&0&-1\frac{-2v'u'x'^1}{c^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{-v'}{c}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\frac{-v'}{c}&0&0&\frac{-2v'u'x'^1}{c^2}\end{bmatrix} \qquad 15.42$$

Que aplicadas na equação de onda fornece:

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\left(x^4\right)^2}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1}&\frac{\partial}{\partial x'^2}&\frac{\partial}{\partial x'^3}&\frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{-v'}{c}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\frac{-v'}{c}&0&0&\frac{-2v'u'x'^1}{c^2}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1}\\\frac{\partial}{\partial x'^2}\\\frac{\partial}{\partial x'^3}\\\frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}=0 \qquad 15.43$$

Efetuando as operações do segundo termo encontramos:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1}&\frac{\partial}{\partial x'^2}&\frac{\partial}{\partial x'^3}&\frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{-v'}{c}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\frac{-v'}{c}&0&0&\frac{-2v'u'x'^1}{c^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1}\\\frac{\partial}{\partial x'^2}\\\frac{\partial}{\partial x'^3}\\\frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}=-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^4}-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^4}-\frac{2v'u'x'^1}{c^2}\frac{\partial^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\left(x'^4\right)^2}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$-\frac{2v'}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial}{\partial x'^4}-\frac{2v'u'x'^1}{c^2}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\left(x'^4\right)^2}$$

Onde aplicando 8.5 temos:

$$-\frac{2v'}{c^2}\left(-\frac{u'x'^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}\right)\frac{\partial}{\partial x'^4}-\frac{2v'}{c^2}\frac{u'x'^1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\left(x'^4\right)^2}=zero$$

Então temos:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1}&\frac{\partial}{\partial x'^2}&\frac{\partial}{\partial x'^3}&\frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{-v'}{c}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\frac{-v'}{c}&0&0&\frac{-2v'u'x'^1}{c^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1}\\\frac{\partial}{\partial x'^2}\\\frac{\partial}{\partial x'^3}\\\frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}=zero \qquad 15.44$$

Com esse resultado obtemos em 15.43 a invariância da equação de onda:

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\left(x^4\right)^2}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1}&\frac{\partial}{\partial x'^2}&\frac{\partial}{\partial x'^3}&\frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1}\\\frac{\partial}{\partial x'^2}\\\frac{\partial}{\partial x'^3}\\\frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}=\nabla^2\phi'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi'}{\partial\left(x'^4\right)^2}=0 \qquad 15.45$$

A equação de onda para o observador O' é igual a:

$$\nabla^2\phi'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi'}{\partial\left(x'^4\right)^2}=\frac{\partial^2\phi'}{\partial\left(x'^1\right)^2}+\frac{\partial^2\phi'}{\partial\left(x'^2\right)^2}+\frac{\partial^2\phi'}{\partial\left(x'^3\right)^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi'}{\partial\left(x'^4\right)^2}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1}&\frac{\partial}{\partial x'^2}&\frac{\partial}{\partial x'^3}&\frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1}\\\frac{\partial}{\partial x'^2}\\\frac{\partial}{\partial x'^3}\\\frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}=0 \qquad 15.46$$

Onde aplicando 15.23 e a transposta de 15.23 temos:

$$\nabla^2\phi'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi'}{\partial\left(x'^4\right)^2}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}&\frac{\partial}{\partial x^2}&\frac{\partial}{\partial x^3}&\frac{\partial}{c\partial x^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{v}{c}&0&0&\sqrt{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{v}{c}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\sqrt{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\\frac{\partial}{\partial x^2}\\\frac{\partial}{\partial x^3}\\\frac{\partial}{c\partial x^4}\end{bmatrix}=0 \qquad 15.47$$

O produto das três matrizes do meio fornece:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{v}{c}&0&0&\sqrt{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{v}{c}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\sqrt{K}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{v}{c}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{v}{c}&0&0&-1+\frac{2vux^1}{c^2}\end{bmatrix} \qquad 15.48$$

Resultado que pode ser dividido em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{v}{c}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{v}{c}&0&0&-1+\frac{2vux^1}{c^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{v}{c}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\frac{v}{c}&0&0&\frac{2vux^1}{c^2}\end{bmatrix} \qquad 15.49$$

Que aplicadas na equação de onda fornece:

$$\nabla^2\phi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi'}{\partial\left(x'^4\right)^2} = \begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{c\partial x^4}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0&\frac{v}{c}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\frac{v}{c}&0&0&\frac{2vux^1}{c^2}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\\frac{\partial}{\partial x^2}\\\frac{\partial}{\partial x^3}\\\frac{\partial}{c\partial x^4}\end{bmatrix} = 0 \qquad 15.50$$

Efetuando as operações do segundo termo encontramos:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{c\partial x^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{v}{c}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\frac{v}{c}&0&0&\frac{2vux^1}{c^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\\frac{\partial}{\partial x^2}\\\frac{\partial}{\partial x^3}\\\frac{\partial}{\partial x^4}\end{bmatrix} = \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^4} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^4} + \frac{2vux^1}{c^2}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\left(x^4\right)^2}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{2v}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^4} + \frac{2vux^1}{c^2}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\left(x^4\right)^2}$$

Onde aplicando 8.5 temos:

$$\frac{2v}{c^2}\left(\frac{-ux^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^4}\right)\frac{\partial}{\partial x^4} + \frac{2vux^1}{c^2}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\left(x^4\right)^2} = zero$$

Então temos:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{c\partial x^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{v}{c}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\frac{v}{c}&0&0&\frac{2vux^1}{c^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\\frac{\partial}{\partial x^2}\\\frac{\partial}{\partial x^3}\\\frac{\partial}{\partial x^4}\end{bmatrix} = zero \qquad 15.51$$

Então em 15.50 temos a invariância da equação de onda:

$$\nabla^2\phi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi'}{\partial\left(x'^4\right)^2} = \begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{c\partial x^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\\frac{\partial}{\partial x^2}\\\frac{\partial}{\partial x^3}\\\frac{\partial}{c\partial x^4}\end{bmatrix} = \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\left(x^4\right)^2} = 0 \qquad 15.52$$

Invariância das equações 8.5 de propagação linear

Substituindo 2.4, 8.2, 8.4B em 8.5 obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{ux^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^4}=\frac{\partial}{\partial x'^1}-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}+\frac{1}{c^2}\frac{\left(u'x'^1+v'\right)}{\sqrt{K'}}\sqrt{K'}\frac{\partial}{\partial x'^4}=zero$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{ux^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^4}=\frac{\partial}{\partial x'^1}-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}+\frac{u'x'^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}+\frac{v'}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}=zero$$

Que simplificada fornece a invariância da equação 8.5:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{ux^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^4}=\frac{\partial}{\partial x'^1}+\frac{u'x'^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}=zero$$

Substituindo 2.3, 8.1, 8.3B em 8.5 obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x'^1}+\frac{u'x'^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}=\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^4}+\frac{1}{c^2}\frac{\left(ux^1-v\right)}{\sqrt{K}}\sqrt{K}\frac{\partial}{\partial x^4}=zero$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x'^1}+\frac{u'x'^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}=\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^4}+\frac{ux^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^4}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^4}=zero$$

Que simplificada fornece a invariância da equação 8.5:

$$\frac{\partial}{\partial x'^1}+\frac{u'x'^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}=\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{ux^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^4}=zero$$

O quadro 4 em forma de matrizes se torna:

$$\begin{bmatrix} px'^1 \\ px'^2 \\ px'^3 \\ E'/c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} px^1 \\ px^2 \\ px^3 \\ E/c \end{bmatrix} \qquad 15.53$$

$$\begin{bmatrix} px^1 \\ px^2 \\ px^3 \\ E/c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} px'^1 \\ px'^2 \\ px'^3 \\ E'/c \end{bmatrix} \qquad 15.54$$

O quadro 6 em forma de matrizes se torna:

$$\begin{bmatrix} J'x'^1 \\ J'x'^2 \\ J'x'^3 \\ c\rho' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Jx^1 \\ Jx^2 \\ Jx^3 \\ c\rho \end{bmatrix} \qquad 15.55$$

$$\begin{bmatrix} Jx^1 \\ Jx^2 \\ Jx^3 \\ c\rho \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J'x'^1 \\ J'x'^2 \\ J'x'^3 \\ c\rho' \end{bmatrix} \qquad 15.56$$

Invariância da Equação de continuidade

A equação de continuidade para o observador O é igual a:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial x^4}=\frac{\partial Jx^1}{\partial x^1}+\frac{\partial Jx^2}{\partial x^2}+\frac{\partial Jx^3}{\partial x^3}+\frac{\partial\rho}{\partial x^4}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{c\partial x^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Jx^1\\Jx^2\\Jx^3\\c\rho\end{bmatrix}=zero \qquad 15.57$$

Onde substituindo 15.24 e 15.56 obtemos:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial x^4}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-v'/c&0&0&\sqrt{K'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&v'/c\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\sqrt{K'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J'x'^1\\J'x'^2\\J'x'^3\\c\rho'\end{bmatrix}=zero \qquad 15.58$$

O produto das matrizes de transformação já foi obtido em 15.27 e 15.28 com isso:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial x^4}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&v'/c\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-v'/c&0&0&\frac{2v'u'x'^1}{c^2}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}J'x'^1\\J'x'^2\\J'x'^3\\c\rho'\end{bmatrix} \qquad 15.59$$

Efetuando as operações do segundo termo obtemos:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&v'/c\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-v'/c&0&0&\frac{2v'u'x'^1}{c^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J'x'^1\\J'x'^2\\J'x'^3\\c\rho'\end{bmatrix}=-\frac{v'}{c^2}\frac{\partial Jx'^1}{\partial x'^4}+\frac{v'\partial\rho'}{\partial x'^1}+\frac{2v'u'x'^1}{c^2}\frac{\partial\rho'}{\partial x'^4}$$

Aonde substituindo $Jx'^1=\rho'u'x'^1$ e 8.5 obtemos:

$$-\frac{v'u'x'^1}{c^2}\frac{\partial\rho'}{\partial x'^4}+v'\left(-\frac{u'x'^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^4}\right)\rho'+\frac{2v'u'x'^1}{c^2}\frac{\partial\rho'}{\partial x'^4}=zero$$

Então temos:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&v'/c\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-v'/c&0&0&\frac{2v'u'x'^1}{c^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J'x'^1\\J'x'^2\\J'x'^3\\c\rho'\end{bmatrix}=zero \qquad 15.60$$

Com esse resultado obtemos em 15.59 a invariância da equação de continuidade:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial x^4}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J'x'^1\\J'x'^2\\J'x'^3\\c\rho'\end{bmatrix}=\vec{\nabla}.\vec{J}'+\frac{\partial\rho'}{\partial x'^4} \qquad 15.61$$

A equação de continuidade para o observador O' é igual a:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}'+\frac{\partial\rho'}{\partial x'^4}=\frac{\partial J'x'^1}{\partial x'^1}+\frac{\partial J'x'^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial J'x'^3}{\partial x'^3}+\frac{\partial\rho'}{\partial x'^4}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{c\partial x'^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J'x'^1\\J'x'^2\\J'x'^3\\c\rho'\end{bmatrix}=zero \qquad 15.62$$

Onde substituindo 15.23 e 15.55 temos:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}'+\frac{\partial\rho'}{\partial x'^4}=\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{c\partial x^4}\right]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\v/c&0&0&\sqrt{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&-v/c\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\sqrt{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Jx^1\\Jx^2\\Jx^3\\c\rho\end{bmatrix}=zero \quad 15.63$$

O produto das matrizes de transformação já foi obtido em 15.34 e 15.35 por isso temos:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}'+\frac{\partial\rho'}{\partial x'^4}=\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{c\partial x^4}\right]\left[\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&-v/c\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\v/c&0&0&-\frac{2vux^1}{c^2}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}Jx^1\\Jx^2\\Jx^3\\c\rho\end{bmatrix} \quad 15.64$$

Efetuando as operações do segundo termo obtemos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{c\partial x^4}\right]\begin{bmatrix}0&0&0&-v/c\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\v/c&0&0&-\frac{2vux^1}{c^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Jx^1\\Jx^2\\Jx^3\\c\rho\end{bmatrix}=\frac{v}{c^2}\frac{\partial Jx^1}{\partial x^4}-\frac{v\partial\rho}{\partial x^1}-\frac{2vux^1}{c^2}\frac{\partial\rho}{\partial x^4}$$

Aonde substituindo $Jx^1=\rho ux^1$ e 8.5 obtemos:

$$\frac{vux^1}{c^2}\frac{\partial\rho}{\partial x^4}-v\left(-\frac{ux^1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^4}\right)\rho-\frac{2vux^1}{c^2}\frac{\partial\rho}{\partial x^4}=zero$$

Então temos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{c\partial x^4}\right]\begin{bmatrix}0&0&0&-v/c\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\v/c&0&0&-\frac{2vux^1}{c^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Jx^1\\Jx^2\\Jx^3\\c\rho\end{bmatrix}=zero \quad 15.65$$

Com esse resultado obtemos em 15.64 a invariância da equação de continuidade:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}'+\frac{\partial\rho'}{\partial x'^4}=\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{c\partial x^4}\right]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Jx^1\\Jx^2\\Jx^3\\c\rho\end{bmatrix}=\vec{\nabla}.\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial x^4} \quad 15.66$$

Invariância do elemento diferencial de linha:

Que para o observador O se escreve como:

$$(ds)^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2-(cdx^4)^2=\left[dx^1\ dx^2\ dx^3\ cdx^4\right]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx^1\\dx^2\\dx^3\\cdx^4\end{bmatrix} \quad 15.67$$

Onde substituindo 15.18 e a transposta de 15.18 temos:

$$(ds)^2=\left[dx'^1\ dx'^2\ dx'^3\ cdx'^4\right]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{v'}{c}&0&0&\sqrt{K'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{v'}{c}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\sqrt{K'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx'^1\\dx'^2\\dx'^3\\cdx'^4\end{bmatrix} \quad 15.68$$

O produto das três matrizes central fornece:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & -1\frac{-2v'dx'^1}{c^2dx'^4} \end{bmatrix} \qquad 15.69$$

Resultado que pode ser dividido em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & -1\frac{-2v'dx'^1}{c^2dx'^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & \frac{-2v'dx'^1}{c^2dx'^4} \end{bmatrix} \qquad 15.70$$

Que aplicadas no elemento diferencial de linha fornece:

$$(ds)^2 = \left[dx'^1\, dx'^2\, dx'^3\, cdx'^4\right] \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & \frac{-2v'dx'^1}{c^2dx'^4} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \qquad 15.71$$

Efetuando as operações do segundo termo encontramos:

$$\left[dx'^1\, dx'^2\, dx'^3\, cdx'^4\right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & \frac{-2v'}{c^2}\frac{dx'^1}{dx'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} = \frac{v'dx'^1\, cdx'^4}{c} + cdx'^4\left(\frac{v'}{c}dx'^1 - \frac{2v'}{c^2}\frac{dx'^1}{dx'^4}cdx'^4\right) = zero$$

Então temos: $\left[dx'^1\, dx'^2\, dx'^3\, cdx'^4\right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & \frac{-2v'}{c^2}\frac{'dx'^1}{dx'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} = zero$ 15.72

Com esse resultado obtemos em 15.71 a invariância do elemento diferencial de linha:

$$(ds)^2 = \left[dx'^1\, dx'^2\, dx'^3\, cdx'^4\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} = \left(dx'^1\right)^2 + \left(dx'^2\right)^2 + \left(dx'^3\right)^2 - \left(cdx'^4\right)^2 = (ds')^2 \qquad 15.73$$

Para o observador O’ o elemento diferencial de linha se escreve como:

$$(ds')^2 = \left(dx'^1\right)^2 + \left(dx'^2\right)^2 + \left(dx'^3\right)^2 - \left(cdx'^4\right)^2 = \left[dx'^1\;\; dx'^2\;\; dx'^3\;\; cdx'^4\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \qquad 15.74$$

Onde substituindo 15.15 e a transposta de 15.15 temos:

$$(ds')^2 = \left[dx^1 dx^2 dx^3 cdx^4\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \qquad 15.75$$

O produto das três matrizes central fornece:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & -1+\frac{2vdx^1}{c^2dx^4} \end{bmatrix} \qquad 15.76$$

Resultado que pode ser dividido em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & -1+\frac{2vdx^1}{c^2dx^4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & \frac{2vdx^1}{c^2dx^4} \end{bmatrix} \qquad 15.77$$

Que aplicadas no elemento diferencial de linha fornece:

$$(ds')^2=\left[dx^1dx^2dx^3cdx^4\right]\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & \frac{2vdx^1}{c^2dx^4} \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \qquad 15.78$$

Efetuando as operações do segundo termo encontramos:

$$\left[dx^1dx^2dx^3cdx^4\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & \frac{2v}{c^2}\frac{dx^1}{dx^4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix}=\frac{-vdx^1cdx^4}{c}+cdx^4\left(\frac{-v}{c}dx^1+\frac{2v}{c^2}\frac{dx^1}{dx^4}cdx^4\right)=zero$$

Então temos:

$$\left[dx^1dx^2dx^3cdx^4\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & \frac{2v}{c^2}\frac{dx^1}{dx^4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix}=zero \qquad 15.79$$

Com esse resultado obtemos em 15.78 a invariância do elemento diferencial de linha:

$$(ds')^2=\left[dx^1dx^2dx^3cdx^4\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix}=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2-(cdx^4)^2=(ds)^2 \qquad 15.80$$

No §7 como conseqüência de 5.3 obtivemos a invariância de $\vec{E}.\vec{u}=\vec{E}'.\vec{u}'$ onde agora aplicando 7.3.1, 7.3.2, 7.4.1, 7.4.2 e as fórmulas de transformação de velocidade do quadro 2 obtemos novas relações entre Ex e $E'x'$ distintas de 7.3 e 7.4 e com elas reescrevemos o quadro 7 na forma abaixo:

Quadro 7B

$E'x'=\frac{Ex\sqrt{K}}{\left(1-\frac{v}{ux}\right)}$	7.3B	$Ex=\frac{E'x'\sqrt{K'}}{\left(1+\frac{v'}{u'x'}\right)}$	7.4B
$E'y'=Ey\sqrt{K}$	7.3.1	$Ey=E'y'\sqrt{K'}$	7.4.1
$E'z'=Ez\sqrt{K}$	7.3.2	$Ez=E'z'\sqrt{K'}$	7.4.2
$B'x'=Bx$	7.5	$Bx=B'x'$	7.6

$B'y' = By + \frac{v}{c^2} Ez$	7.5.1	$By = B'y' - \frac{v'}{c^2} E'z'$	7.6.1
$B'z' = Bz - \frac{v}{c^2} Ey$	7.5.2	$Bz = B'z' + \frac{v'}{c^2} E'y'$	7.6.2
$By = -\frac{ux}{c^2} Ez$	7.9	$B'y' = -\frac{u'x'}{c^2} E'z'$	7.10
$Bz = \frac{ux}{c^2} Ey$	7.9.1	$B'z' = \frac{u'x'}{c^2} E'y'$	7.10.1
$\left(1-\frac{v}{ux}\right)\left(1+\frac{v'}{u'x'}\right)=1$			

Com os quadros 7B e 9B podemos obter a invariância de todas as equações de Maxwell.

Invariância da lei de Gauss para o campo elétrico:

$$\frac{\partial E'x'}{\partial x'} + \frac{\partial E'y'}{\partial y'} + \frac{\partial E'z'}{\partial z'} = \frac{\rho'}{\varepsilon_0} \qquad 8.14$$

Onde aplicando os quadros 6, 7B e 9B obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{Ex\sqrt{K}}{(1 - v/ux)} + \frac{\partial Ey\sqrt{K}}{\partial y} + \frac{Ez\sqrt{K}}{\partial z} = \frac{\rho\sqrt{K}}{\varepsilon_0}$$

Onde simplificando e substituindo 8.5 obtemos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + v\left(\frac{-1}{ux}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\frac{Ex}{(1 - v/ux)} + \frac{\partial Ey}{\partial y} + \frac{Ez}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Que reordenada fornece:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{v}{ux}\right)\right]\frac{Ex}{(1 - v/ux)} + \frac{\partial Ey}{\partial y} + \frac{Ez}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Que simplificada fornece a invariância da lei de Gauss para o campo elétrico.

Invariância da lei de Gauss para o campo magnético:

$$\frac{\partial B'x'}{\partial x'} + \frac{\partial B'y'}{\partial y'} + \frac{\partial B'z'}{\partial z'} = zero \qquad 8.16$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)Bx + \frac{\partial}{\partial y}\left(By + \frac{v}{c^2}Ez\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(Bz - \frac{v}{c^2}Ey\right) = 0$$

Que reordenada fornece:

$$\frac{\partial Bx}{\partial x} + \frac{\partial By}{\partial y} + \frac{\partial Bz}{\partial z} + \frac{v}{c^2}\left(\frac{\partial Ez}{\partial y} - \frac{\partial Ey}{\partial z} + \frac{\partial Bx}{\partial t}\right) = 0$$

Onde o termo entre parêntese é a lei de Faraday – Henry (8.19) que é igual a zero por isso obtemos a invariância da lei de Gauss para o campo magnético.

Invariância da lei de Faraday - Henry:

$$\frac{\partial E'y'}{\partial x'}-\frac{\partial E'x'}{\partial y'}=-\frac{\partial B'z'}{\partial t'} \qquad 8.18$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)Ey\sqrt{K}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{Ex\sqrt{K}}{(1-v/ux)}=-\sqrt{K}\frac{\partial}{\partial t}\left(Bz-\frac{v}{c^2}Ey\right)$$

Que simplificada e multiplicada por $(1-v/ux)$ obtemos:

$$\frac{\partial Ey}{\partial x}\left(1-\frac{v}{ux}\right)-\frac{\partial Ex}{\partial y}=-\frac{\partial Bz}{\partial t}\left(1-\frac{v}{ux}\right)$$

Onde fazendo os produtos e substituindo 7.9.1 obtemos:

$$\frac{\partial Ey}{\partial x}-\frac{\partial Ex}{\partial y}=-\frac{\partial Bz}{\partial t}+\frac{v}{ux}\left(\frac{\partial Ey}{\partial x}+\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial t}\right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Faraday – Henry.

Invariância da lei de Faraday - Henry:

$$\frac{\partial E'z'}{\partial y'}-\frac{\partial E'y'}{\partial z'}=-\frac{\partial B'x'}{\partial t'} \qquad 8.20$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\frac{\partial Ez}{\partial y}\sqrt{K}-\frac{\partial Ey}{\partial z}\sqrt{K}=-\sqrt{K}\frac{\partial Bx}{\partial t}$$

Que simplificada fornece a invariância da lei de Faraday – Henry.

Invariância da lei de Faraday - Henry:

$$\frac{\partial E'x'}{\partial z'}-\frac{\partial E'z'}{\partial x'}=-\frac{\partial B'y'}{\partial t'} \qquad 8.22$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{Ex\sqrt{K}}{(1-v/ux)}-\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)Ez\sqrt{K}=-\sqrt{K}\frac{\partial}{\partial t}\left(By+\frac{v}{c^2}Ez\right)$$

Que simplificada e multiplicada por $(1-v/ux)$ obtemos:

$$\frac{\partial Ex}{\partial z}-\frac{\partial Ez}{\partial x}\left(1-\frac{v}{ux}\right)-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}\left(1-\frac{v}{ux}\right)=-\frac{\partial By}{\partial t}\left(1-\frac{v}{ux}\right)-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}\left(1-\frac{v}{ux}\right)$$

Que simplificando e fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial Ex}{\partial z}-\frac{\partial Ez}{\partial x}=-\frac{\partial By}{\partial t}-\frac{v}{ux}\left(\frac{\partial Ez}{\partial x}-\frac{\partial By}{\partial t}\right)$$

Onde aplicando 7.9 obtemos:

$$\frac{\partial Ex}{\partial z}-\frac{\partial Ez}{\partial x}=-\frac{\partial By}{\partial t}-\frac{v}{ux}\left(\frac{\partial Ez}{\partial x}+\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}\right).$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Faraday – Henry.

Invariância da lei de Ampère - Maxwell:

$$\frac{\partial B'y'}{\partial x'}-\frac{\partial B'x'}{\partial y'}=\mu_o J'z'+\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial E'z'}{\partial t'} \qquad 8.24$$

Onde aplicando os quadros 6, 7B e 9B obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(By+\frac{v}{c^2}Ez\right)-\frac{\partial Bx}{\partial y}=\mu_0 Jz+\varepsilon_0\mu_0\sqrt{K}\frac{\partial}{\partial t}Ez\sqrt{K}$$

Que simplificando e fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial By}{\partial x}-\frac{\partial Bx}{\partial y}=\mu_0 Jz+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ez}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial x}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial By}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}$$

Onde simplificando e aplicando 7.9 obtemos:

$$\frac{\partial By}{\partial x}-\frac{\partial Bx}{\partial y}=\mu_0 Jz+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ez}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial x}-\frac{v}{c^2}\left(\frac{-ux}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}\right)$$

Que reordenada fornece

$$\frac{\partial By}{\partial x}-\frac{\partial Bx}{\partial y}=\mu_0 Jz+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ez}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\left(\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}+\frac{\partial Ez}{\partial x}\right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Ampère - Maxwell:

Invariância da lei de Ampère - Maxwell:

$$\frac{\partial B'z'}{\partial y'}-\frac{\partial B'y'}{\partial z'}=\mu_o J'x'+\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial E'x'}{\partial t'} \qquad 8.26$$

Onde aplicando os quadros 6, 7B e 9B obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(Bz-\frac{v}{c^2}Ey\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(By+\frac{v}{c^2}Ez\right)=\mu_0(Jx-\rho v)+\varepsilon_0\mu_0\sqrt{K}\frac{\partial}{\partial t}\frac{Ex\sqrt{K}}{(1-v/ux)}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\mu_0 Jx+\frac{v}{c^2}\left(\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{\partial Ez}{\partial z}-\mu_0 c^2\rho\right)+\varepsilon_0\mu_0\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}\right)\frac{\partial Ex}{\partial t}\frac{1}{(1-v/ux)}$$

Substituindo no primeiro parêntese a lei Gauss e multiplicando por $\left(1-\frac{v}{ux}\right)$ obtemos:

$$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\mu_0 Jx+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ex}{\partial t}+\frac{v}{ux}\left(\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}-\mu_0 Jx\right)-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{1}{ux}\frac{\partial Ex}{\partial x}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}$$

Onde substituindo $Jx = \rho ux$, 7.9.1, 7.9 e 8.5 obtemos:

$$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\mu_0 Jx+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ex}{\partial t}+\frac{v}{ux}\left(\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial z}-\mu_0\rho ux\right)-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{-1}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}$$

Que simplificada fornece:

$$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\mu_0 Jx+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ex}{\partial t}+\frac{v}{c^2}\left(\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{\partial Ez}{\partial z}-\mu_0 c^2\rho\right)-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}$$

Substituindo no primeiro parêntese a lei Gauss obtemos:

$$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\mu_0 Jx+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ex}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}$$

Que reordenada fica:

$$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\mu_0 Jx\ +\ \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ex}{\partial t}-\frac{2v}{c^2}\left(\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}\right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Ampère - Maxwell:

Invariância da lei de Ampère - Maxwell:

$$\frac{\partial B'x'}{\partial z'}-\frac{\partial B'z'}{\partial x'}=\mu_o J'y'+\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial E'y'}{\partial t'} \qquad 8.28$$

Onde aplicando os quadros 6, 7B e 9B obtemos:

$$\frac{\partial Bx}{\partial z}-\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(Bz-\frac{v}{c^2}Ey\right)=\mu_0 Jy+\varepsilon_0\mu_0\sqrt{K}\frac{\partial}{\partial t}Ey\sqrt{K}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial Bx}{\partial z}-\frac{\partial Bz}{\partial x}=\mu_0 Jy+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ey}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial Bz}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial t}$$

Onde simplificando e aplicando 7.9.1 obtemos:

$$\frac{\partial Bx}{\partial z}-\frac{\partial Bz}{\partial x}=\mu_0 Jy+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ey}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\left(\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial t}\right)$$

Que reordenada fica:

$$\frac{\partial Bx}{\partial z}-\frac{\partial Bz}{\partial x}=\mu_0 Jy+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ey}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\left(\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial t}+\frac{\partial Ey}{\partial x}\right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Ampère - Maxwell:

Invariância da lei de Gauss para o campo elétrico sem carga elétrica:

$$\frac{\partial E'x'}{\partial x'}+\frac{\partial E'y'}{\partial y'}+\frac{\partial E'z'}{\partial z'}=zero \qquad 8.30$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{Ex\sqrt{K}}{(1-v/ux)}+\frac{\partial Ey\sqrt{K}}{\partial y}+\frac{Ez\sqrt{K}}{\partial z}=zero$$

Onde simplificando e substituindo 8.5 obtemos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}+v\left(\frac{-1}{ux}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\frac{Ex}{(1-v/ux)}+\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{Ez}{\partial z}=zero$$

Que reordenada fornece:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(1-\frac{v}{ux}\right)\right]\frac{Ex}{(1-v/ux)}+\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{Ez}{\partial z}=zero\,.$$

Que simplificada fornece a lei de Gauss para o campo elétrico sem carga elétrica.

Invariância da lei de Ampère – Maxwell sem carga elétrica:

$$\frac{\partial B'y'}{\partial x'}-\frac{\partial B'x'}{\partial y'}=\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial E'z'}{\partial t'} \qquad 8.40$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(By+\frac{v}{c^2}Ez\right)-\frac{\partial Bx}{\partial y}=\varepsilon_0\mu_0\sqrt{K}\frac{\partial}{\partial t}Ez\sqrt{K}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial By}{\partial x}-\frac{\partial Bx}{\partial y}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ez}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial x}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial By}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}$$

Onde simplificando e aplicando 7.9 obtemos:

$$\frac{\partial By}{\partial x}-\frac{\partial Bx}{\partial y}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ez}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial x}-\frac{v}{c^2}\left(\frac{-ux}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}\right)$$

Que reordenada fica:

$$\frac{\partial By}{\partial x}-\frac{\partial Bx}{\partial y}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ez}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\left(\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial t}+\frac{\partial Ez}{\partial x}\right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Ampère – Maxwell sem carga elétrica:

Invariância da lei de Ampère – Maxwell sem carga elétrica:

$$\frac{\partial B'z'}{\partial y'}-\frac{\partial B'y'}{\partial z'}=\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial E'x'}{\partial t'} \qquad 8.42$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(Bz-\frac{v}{c^2}Ey\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(By+\frac{v}{c^2}Ez\right)=\varepsilon_0\mu_0\sqrt{K}\frac{\partial}{\partial t}\frac{Ex\sqrt{K}}{(1-v/ux)}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\frac{v}{c^2}\left(\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{\partial Ez}{\partial z}\right)+\varepsilon_0\mu_0\left(1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}\right)\frac{\partial Ex}{\partial t}\frac{1}{(1-v/ux)}$$

Substituindo no primeiro parêntese a lei Gauss sem carga elétrica e multiplicando por $(1-v/ux)$ obtemos:

$$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ex}{\partial t}+\frac{v}{ux}\left(\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}\right)-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{1}{ux}\frac{\partial Ex}{\partial x}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}$$

Onde substituindo 7.9, 7.9.1 e 8.5 obtemos:

$$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ex}{\partial t}+\frac{v}{ux}\left(\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ez}{\partial z}\right)-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{-1}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}$$

Que simplificada fornece:

$$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ex}{\partial t}+\frac{v}{c^2}\left(\frac{\partial Ey}{\partial y}+\frac{\partial Ez}{\partial z}\right)-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}$$

Substituindo no primeiro parêntese a lei Gauss sem carga elétrica obtemos:

$$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ex}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial x}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}$$

Que reordenada fica:

$$\frac{\partial Bz}{\partial y}-\frac{\partial By}{\partial z}=\mu_0 Jx+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ex}{\partial t}-\frac{2v}{c^2}\left(\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}\right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Ampère – Maxwell sem carga elétrica:

Invariância da lei de Ampère – Maxwell sem carga elétrica:

$$\frac{\partial B'x'}{\partial z'}-\frac{\partial B'z'}{\partial x'}=\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial E'y'}{\partial t'} \qquad 8.44$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\frac{\partial Bx}{\partial z}-\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(Bz-\frac{v}{c^2}Ey\right)=\varepsilon_0\mu_0\sqrt{K}\frac{\partial}{\partial t}Ey\sqrt{K}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial Bx}{\partial z}-\frac{\partial Bz}{\partial x}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ey}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial Bz}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial t}$$

Onde simplificando e aplicando 7.9.1 obtemos:

$$\frac{\partial Bx}{\partial z}-\frac{\partial Bz}{\partial x}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ey}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{2vux}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\left(\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial t}\right)$$

Que reordenada fica:

$$\frac{\partial Bx}{\partial z}-\frac{\partial Bz}{\partial x}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial Ey}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\left(\frac{ux}{c^2}\frac{\partial Ey}{\partial t}+\frac{\partial Ey}{\partial x}\right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Ampère – Maxwell sem carga elétrica:

§15 Invariância (continuação)

Uma função $f(\theta)=\mathrm{f}(\mathrm{kr}-wt)$ 2.19

Onde a fase é igual a $\theta=(kr-wt)$ 15.81

Para representar um movimento ondulatório que propaga em uma direção arbitrária deve satisfazer a equação de onda por isso temos:

$$\frac{k}{r^2}\left[3r-\frac{(x^2+y^2+z^2)}{r}\right]\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}+\frac{k^2}{r^2}(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta^2}-k^2\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta^2}=zero \quad 15.82$$

Que não atende a equação de onda porque os dois últimos termos se anulam mais o primeiro não.

Para contornar este problema reformulemos a fase θ da função da forma seguinte.

Um vetor unitário como

$$\vec{n}=cos\,\phi\vec{i}+cos\,\alpha\vec{j}+cos\,\beta\vec{k} \quad 15.83$$

onde $cos\phi=\frac{x}{r}=\frac{x}{ct}$, $cos\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{ct}$, $cos\beta=\frac{z}{r}=\frac{z}{ct}$ 15.84

tem o módulo igual a $n=|\vec{n}|=\sqrt{\vec{n}.\vec{n}}=\sqrt{cos^2\phi+cos^2\alpha+cos^2\beta}=1$. 15.85

Fazendo o produto

$$\vec{n}.\vec{R}=\left(cos\phi\vec{i}+cos\alpha\vec{j}+cos\beta\vec{k}\right).\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)=cos\phi x+cos\alpha y+cos\beta z=\frac{x^2+y^2+z^2}{r}=\frac{r^2}{r}=r \quad 15.86$$

obtemos $r=\vec{n}.\vec{R}=cos\,\phi x+cos\,\alpha y+cos\,\beta z$ que aplicado na fase θ fornece uma nova fase

$$\Phi=(kr-wt)=\left(k\vec{n}.\vec{R}-wt\right)=(k\,cos\,\phi x+k\,cos\,\alpha y+k\,cos\,\beta z-wt) \quad 15.87$$

com o mesmo significado da fase anterior $\theta=\Phi$.

Substituindo $r=\vec{n}.\vec{R}=cos\,\phi x+cos\,\alpha y+cos\,\beta z$ e $k=\frac{w}{c}$ na fase θ multiplicada por –1 obtemos também uma outra fase na forma

$$\Phi=(-1)(kr-wt)=(wt-kr)=\left[w\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]=\left[w\left(t-\frac{\cos\phi x+\cos\alpha y+\cos\beta z}{c}\right)\right] \qquad 15.88$$

com o mesmo significado da fase anterior $(-1)\theta=\Phi$.

E assim podemos escrever uma nova função como:

$$f(\Phi)=\mathrm{f}\left[w\left(t-\frac{\cos\phi x+\cos\alpha y+\cos\beta z}{c}\right)\right] \qquad 15.89$$

Que substituída na equação de onda com os co-senos diretores considerados constantes fornece:

$$\frac{\partial^2 f(\Phi)}{\partial\Phi^2}\frac{w^2}{c^2}\cos^2\phi+\frac{\partial^2 f(\Phi)}{\partial\Phi^2}\frac{w^2}{c^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 f(\Phi)}{\partial\Phi^2}\frac{w^2}{c^2}\cos^2\beta-\frac{\partial^2 f(\Phi)}{\partial\Phi^2}\frac{w^2}{c^2}=zero \qquad 15.90$$

que simplificada atende a equação de onda.
O resultado positivo da fase Φ na equação de onda é conseqüência exclusiva dos co-senos diretores serem constantes nas derivadas parciais, demonstrando que a equação de onda exige que a propagação tenha uma direção fixa no espaço (onda plana).

Para o observador O uma fonte situada na origem do seu referencial, produz em um ponto A aleatório situado à distância $r=ct=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ da origem, um campo elétrico $\vec{E}$ descrito por:

$$\vec{E}=Ex\vec{i}+Ey\vec{j}+Ez\vec{k} \qquad 15.91$$

Onde as componentes são descritas como:

$$\begin{aligned} Ex&=E_{xo}.f(\Phi)\\ Ey&=E_{yo}.f(\Phi)\\ Ez&=E_{zo}.f(\Phi)\end{aligned} \qquad 15.92$$

Que aplicadas em $\vec{E}$ fornece:

$$\vec{E}=E_{xo}f(\Phi)\vec{i}+E_{yo}f(\Phi)\vec{j}+E_{zo}f(\Phi)\vec{k}=\left[E_{xo}\vec{i}+E_{yo}\vec{j}+E_{zo}\right]f(\Phi)=\vec{E}_o f(\Phi). \qquad 15.93$$

com módulo igual a $E=\sqrt{(E_{xo})^2+(E_{yo})^2+(E_{zo})^2}.f(\Phi)\Rightarrow E=E_o.f(\Phi)$ 15.94

Sendo $\vec{E}_o=E_{xo}\vec{i}+E_{yo}\vec{j}+E_{zo}\vec{k}$
15.95

o vetor amplitude máxima constante de componentes E_{xo}, E_{yo}, E_{zo} 15.96
e módulo $E_o=\sqrt{(E_{xo})^2+(E_{yo})^2+(E_{zo})^2}$ 15.97

Sendo $f(\Phi)$ uma função com a fase Φ igual a 15.87 ou 15.88.

Derivando a componente E_x em relação à x e t obtemos:

$$\frac{\partial Ex}{\partial x}=E_{xo}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=E_{xo}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial\Phi}\frac{\partial(kr-wt)}{\partial x}=E_{xo}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial\Phi}\frac{kx}{r}=E_{xo}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial\Phi}\frac{kx}{ct} \qquad 15.98$$

$$\frac{\partial Ex}{\partial t}=E_{xo}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=E_{xo}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial\Phi}\frac{\partial(kr-wt)}{\partial t}=E_{xo}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial\Phi}(-w) \qquad 15.99$$

que aplicadas em 8.5 fornece

$$\frac{\partial Ex}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial Ex}{\partial t}=zero\Rightarrow E_{xo}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}E_{xo}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial t}=zero\Rightarrow E_{xo}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)=zero$$

$$E_{xo}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)=zero\Rightarrow\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}=zero \qquad 15.100$$

demonstrando que é a fase Φ que deve atender a 8.5.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}=zero\Rightarrow\frac{\partial(kr-wt)}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial(kr-wt)}{\partial t}=zero\Rightarrow\frac{kx}{ct}+\frac{x/t}{c^2}(-w)=zero\Rightarrow\frac{x}{ct}\left(k-\frac{w}{c}\right)=zero$$

como $k=\frac{w}{c}$ então E_x atende a 8.5.

Como a fase é a mesma para as componentes E_y e E_z então elas também atendem a 8.5.

Como as fase para os observador O e O' são iguais $(kr-wt)=(k'r'-w't')$ então as componentes do observador O' também atendem a 8.5.

$$\frac{\partial(kr-wt)}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial(kr-wt)}{\partial t}=\frac{\partial(k'r'-w't')}{\partial x'}+\frac{x'/t'}{c^2}\frac{\partial(k'r'-w't')}{\partial t'}=zero \qquad 15.101$$

As componentes relativas ao observador O do campo elétrico se transformam para o referencial do observador O' de acordo com os quadros 7, 7B e 8.

Uma função na forma:

$$\Psi=e^{i(kx-wt)}=e^{i\Phi}=cos(kx-wt)+i\,sen(kx-wt)=cos\,\Phi+i\,sen\,\Phi \qquad 15.102$$

onde $i=\sqrt{-1}$

Tem as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}=-k\,sen\,\Phi+ki\,cos\,\Phi \text{ e } \frac{\partial \Psi}{\partial t}=w\,sen\,\Phi-wi\,cos\,\Phi \qquad 15.103$$

ou $\frac{\partial \Psi}{\partial x}=ke^{i\Phi}$ e $\frac{\partial \Psi}{\partial t}=-we^{i\Phi}$ 15.104

Que aplicadas em 8.5 fornece:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial \Psi}{\partial t}=zero\Rightarrow(-k\,sen\,\Phi+ki\,cos\,\Phi)+\frac{x/t}{c^2}(w\,sen\,\Phi-wi\,cos\,\Phi)=zero$$

que simplificada fica igual a:

$$\left(-k+\frac{xw}{c^2t}\right)sen\,\Phi+\left(ki-\frac{xwi}{c^2t}\right)cos\,\Phi=zero$$

ou $\frac{\partial \Psi}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial \Psi}{\partial t}=zero\Rightarrow\left(ke^{i\Phi}\right)+\frac{x/t}{c^2}\left(-we^{i\Phi}\right)=zero$

para obtermos uma identidade devemos ter os coeficientes iguais a zero por isso:

$$-k+\frac{xw}{c^2t}=zero\Rightarrow k=\frac{xw}{c^2t}$$
$$ki-\frac{xwi}{c^2t}=zero\Rightarrow k=\frac{xw}{c^2t}$$

$$\left(ke^{i\Phi}\right)+\frac{x/t}{c^2}\left(-we^{i\Phi}\right)=zero\Rightarrow k=\frac{xw}{c^2t}$$

onde aplicando $w=ck$ obtemos:

$$k=\frac{xck}{c^2t}\Rightarrow\frac{x}{t}=c$$

Então para atendermos a equação 8.5 devemos ter uma propagação ao longo do eixo x à velocidade c.

Se aplicarmos $w=uk$ e $v=\frac{x}{t}$ obtemos:

$$k=\frac{xw}{c^2t}=\frac{vuk}{c^2}\Rightarrow u=\frac{c^2}{v}.$$

Resultado também obtido da equação de onda de Louis de Broglie.

§16 Tempo e Freqüência

Elevemos o efeito Doppler a categoria de uma lei da física.

Podemos definir relógio como qualquer aparelho que produza uma freqüência de eventos idênticos em série que possam ser enumerados e somados, de tal forma que um evento aleatório n de um aparelho, seja exatamente igual, a qualquer evento da série de eventos produzidos por outra réplica desse aparelho quando os eventos são comparados em repouso relativo.

O movimento cíclico do ponteiro de um relógio em repouso no referencial do observador O marca o tempo neste referencial e o movimento cíclico do ponteiro de um relógio em repouso no referencial do observador O' marca o tempo neste referencial. As fórmulas de transformação de tempo 1.7 e 1.8 relacionam os tempos entre os referenciais em movimento relativo, ou seja, relacionam movimentos em movimento relativo.

O movimento relativo entre os referenciais inerciais produz o efeito Doppler que prova que a freqüência varia com a velocidade e como a freqüência pode ser interpretada como a freqüência do movimento cíclico do ponteiro de um relógio, então o tempo varia na mesma proporção que varia a freqüência com o movimento relativo, isto é, basta substituir o tempo t e t' nas fórmulas 1.7 e 1.8 pelas freqüências y e y' para obtermos as fórmulas de transformação de freqüência, assim:

$t'=t\sqrt{K}\Rightarrow y'=y\sqrt{K}$ 1.7 se transforma em 2.22

$t=t'\sqrt{K'}\Rightarrow y=y'\sqrt{K'}$ 1.8 se transforma em 2.22

A transformação de Galileu $\vec{u}'=\vec{u}-\vec{v}$ de velocidades entre dois referenciais inerciais possui intrinsecamente três defeitos assim descritos:

a) A transformação de Galileu de velocidade para o eixo x é $u'x'=ux-v$. Nesta se tivermos $ux=c$ então $u'x'=c-v$ e se tivermos $u'x'=c$ então $ux=c+v$. Como ambos os resultados simultaneamente não são permitidos ou teremos $ux=c$ ou $u'x'=c$ então a transformação não permiti que um raio de luz seja simultaneamente observado pelos observadores O e O' o que demonstra o privilégio de um observador em relação ao outro porque cada observador só pode observar o raio propagando em seu próprio referencial (defeito intrínseco a análise clássica do efeito de Sagnac).

b) Também não atende a primeira lei de Newton a lei da inércia porque um raio de luz emitido paralelo ao eixo x a partir da origem dos respectivos referenciais inerciais no instante em que as origens são coincidentes e no momento em que t = t' = zero terá pela transformação de Galileu a velocidade c da luz alterada por $\pm v$ para os referenciais, contrariando a lei da inércia, que não permitiria que houvesse variação na velocidade porque não existe nenhuma ação externa atuando sobre o raio de luz e por isso ambos os observadores deveriam observar o raio de luz com velocidade c.

c) Como considera o tempo constante entre os referenciais não produz a variação temporal entre os referenciais em movimento como exigido pelo efeito Doppler.

O princípio da constância da velocidade da luz nada mais é do que uma exigência da primeira lei de Newton a lei da inércia.

A primeira lei de Newton a lei da inércia é introduzida na transformação de Galileu, quando o princípio da constância da velocidade da luz é aplicado na transformação de Galileu obtendo as equações dos Quadros 1 e 2 da Relatividade Ondulatória que não possuem os três defeitos descritos.

As equações para o tempo e a velocidade dos quadros 1 e 2 podem ser escritas como:

$$t' = t\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2v}{c}\cos\phi} \qquad 1.7$$

$$v' = \frac{v}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2v}{c}\cos\phi}} \qquad 1.15$$

$$t = t'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'}{c}\cos\phi'} \qquad 1.8$$

$$v = \frac{v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'}{c}\cos\phi'}} \qquad 1.20$$

À distância d entre os referenciais é igual ao produto da velocidade pelo tempo assim:

$$d = vt = v't' \qquad 1.9$$

Que não depende do ângulo de propagação do raio de luz, sendo exclusivamente função da velocidade e do tempo, ou seja, o ângulo de propagação do raio de luz só altera entre os referenciais inercial a proporção entre o tempo e a velocidade mantendo constante à distância em cada instante para qualquer ângulo de propagação,

As equações acima na forma de função se escrevem como:

$$d = e(v,t) = e'(v',t') \qquad 1.9$$

$$t' = f(v,t,\phi) \qquad 1.7$$

$$v' = g(v,\phi) \qquad 1.15$$

$$t = f'(v',t',\phi') \qquad 1.8$$

$$v = g'(v',\phi') \qquad 1.20$$

Então temos que a distância é função de duas variáveis o tempo função de três variáveis e a velocidade função de duas variáveis.

Da definição de momento 4.1 e energia 4.6 obtemos:

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{u} \qquad 16.1$$

Que elevada ao quadrado fornece:

$$\frac{u^2}{c^2}=\frac{c^2}{E^2}p^2 \qquad 16.2$$

Elevando ao quadrado a fórmula da energia obtemos:

$$E^2=\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)^2 \Rightarrow E^2-E^2\frac{u^2}{c^2}=m_0^2c^4$$

Onde aplicando 16.2 obtemos:

$$E^2-E^2\frac{u^2}{c^2}=m_0^2c^4 \Rightarrow E^2-E^2\frac{c^2}{E^2}p^2=m_0^2c^4 \Rightarrow E=c\sqrt{p^2+m_0^2c^2} \qquad 4.8$$

De onde concluímos que se a massa de repouso de uma partícula é nula $m_o = zero$ a energia da partícula é igual a $E = c\,p$. 16.3

Que aplicada em 16.2 fornece:

$$\frac{u^2}{c^2}=\frac{c^2}{E^2}p^2 \Rightarrow \frac{u^2}{c^2}=\frac{c^2}{(cp)^2}p^2 \Rightarrow u=c \qquad 16.4$$

De onde concluímos que o movimento de uma partícula com massa de repouso nula $m_o = zero$ será sempre á velocidade da luz $u = c$.

Aplicando em $E = c\,p$ as relações $E=yh$ e $c=y\lambda$ obtemos:

$$yh=y\lambda p \Rightarrow p=\frac{h}{\lambda} \text{ e da mesma forma } p'=\frac{h}{\lambda'} \qquad 16.5$$

Equação que relaciona o momento de uma partícula de massa de repouso nula com seu comprimento de onda.

Elevando ao quadrado a fórmula de transformação de momento (4.9) obtemos:

$$\vec{p}'=\vec{p}-\frac{E}{c^2}\vec{v} \Rightarrow p'^2=p^2+\frac{E^2}{c^4}v^2-2\frac{E}{c^2}vpx$$

Onde aplicando $E = c\,p$ e $px=p\cos\phi=p\frac{ux}{c}$ encontramos:

$$p'^2=p^2+\frac{(cp)^2}{c^4}v^2-2\frac{cp}{c^2}vp\frac{ux}{c} \Rightarrow p'=p\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}} \Rightarrow p'=p\sqrt{K} \qquad 16.6$$

Onde aplicando 16.5 resulta em:

$$p'=p\sqrt{K} \Rightarrow \frac{h}{\lambda'}=\frac{h}{\lambda}\sqrt{K} \Rightarrow \lambda'=\frac{\lambda}{\sqrt{K}} \text{ ou invertida } \lambda=\frac{\lambda'}{\sqrt{K'}} \qquad 2.21$$

Onde aplicando $c = y\lambda$ e $c = y'\lambda'$ obtemos:

$$y'=y\sqrt{K} \text{ ou invertida } y=y'\sqrt{K'} \qquad 2.22$$

No § 2 obtemos as equações 2.21 e 2.22 aplicando o princípio da relatividade à fase da onda.

§17 Transformação de H. Lorentz

Para dois observadores em movimento relativo a equação que representa o princípio da constância da velocidade da luz para um ponto aleatório A é:

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \tag{17.01}$$

Nesta cancelando os termos simétricos obtemos:

$$x'^2-c^2t'^2=x^2-c^2t^2 \tag{17.02}$$

Que podemos escrever na forma:

$$(x'-ct')(x'+ct')=(x-ct)(x+ct) \tag{17.03}$$

Se nesta definirmos os fatores de proporção η e μ como:

$$\begin{cases}(x'-ct')=\eta(x-ct) & A\\ (x'+ct')=\mu(x+ct) & B\end{cases} \tag{17.04}$$

onde teremos que ter $\eta.\mu=1$ para atendermos a 17.03.

As equações 17.04 foram obtidas originalmente por Albert Einstein.

Quando para o observador O’ um raio de luz propaga no plano y’z’ teremos x’ = zero e x = vt condições que aplicadas na equação 17.02 fornece:

$$0-c^2t'^2=(vt)^2-c^2t^2 \Rightarrow t'=t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{17.05}$$

Resultado que as equações A e B do conjunto 17.04 sob as mesmas condições também devem fornecer:

$$\begin{cases}\left(0-ct\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)=\eta(vt-ct) & A\\ \left(0+ct\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)=\mu(vt+ct) & B\end{cases} \tag{17.06}$$

Destas obtemos:

$$\eta=\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \text{ e } \mu=\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \tag{17.07}$$

Onde comprovamos que $\eta.\mu=1$.

Do conjunto 17.04 obtemos as Transformações de H. Lorentz:

$$x'=\frac{(\eta+\mu)}{2}x+\frac{(\mu-\eta)}{2}ct \tag{17.08}$$

$$ct'=\frac{(\mu-\eta)}{2}x+\frac{(\eta+\mu)}{2}ct \tag{17.09}$$

$$x=\frac{(\eta+\mu)}{2}x'+\frac{(\eta-\mu)}{2}ct' \tag{17.10}$$

$$ct=\frac{(\eta-\mu)}{2}x'+\frac{(\eta+\mu)}{2}ct' \tag{17.11}$$

Calculo dos coeficientes $\frac{\eta+\mu}{2}$, $\frac{\mu-\eta}{2}$ e $\frac{\eta-\mu}{2}$:

$$\eta+\mu=\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}+\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}=\frac{1+\frac{v}{c}+1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}\sqrt{1+\frac{v}{c}}}=\frac{2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Rightarrow\frac{\eta+\mu}{2}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{17.12}$$

$$\mu-\eta=\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}-\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}=\frac{1-\frac{v}{c}-1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}\sqrt{1-\frac{v}{c}}}=\frac{-2\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Rightarrow\frac{\mu-\eta}{2}=\frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{17.13}$$

$$\eta-\mu=\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}-\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}=\frac{1+\frac{v}{c}-1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}\sqrt{1+\frac{v}{c}}}=\frac{2\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Rightarrow\frac{\eta-\mu}{2}=\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{17.14}$$

Efeito de Sagnac

No instante em que as origens dos dois observadores coincidem o tempo é zerado (t = t' = zero) em ambos os referenciais e dois raios de luz são emitidos a partir da origem comum, um no sentido positivo (horário índice c) dos eixos x e x' com frente de onda A_c e outro no sentido negativo (anti-horário índice u) dos eixos x e x' com frente de onda A_u.

As condições de propagação acima aplicada nas equações de Lorentz fornecem os quadros A e B abaixo:

Quadro A

Equação	Raio horário (c)	Equação	Raio anti-horário (u)	Soma dos raios
	Resultado		Resultado	
Condição	$x_c=ct_c$	Condição	$x_u=-ct_u$	
17.08	$x'_c=\mu ct_c$	17.08	$x'_u=-\eta ct_u$	
	$x'_c=\mu x_c$		$x'_u=\eta x_u$	$x'_c+x'_u=\mu x_c+\eta x_u$
17.09	$ct'_c=\mu ct_c$	17.09	$ct'_u=\eta ct_u$	$ct'_c+ct'_u=\mu ct_c+\eta ct_u$
	$x'_c=ct'_c$		$x'_u=-ct'_u$	

Quadro B

Equação	Raio horário (c)	Equação	Raio anti-horário (u)	Soma dos raios
	Resultado		Resultado	
Condição	$x'_c=ct'_c$	Condição	$x'_u=-ct'_u$	
17.10	$x_c=\eta ct'_c$	17.10	$x_u=-\mu ct'_u$	
	$x_c=\eta x'_c$		$x_u=\mu x'_u$	$x_c+x_u=\eta x'_c+\mu x'_u$
17.11	$ct_c=\eta ct'_c$	17.11	$ct_u=\mu ct'_u$	$ct_c+ct_u=\eta ct'_c+\mu ct'_u$
	$x_c=ct_c$		$x_u=-ct_u$	

Observemos que os quadros A e B são inversos um do outro.

Formemos o conjunto das equações de soma dos raios dos quadros A e B:

$$\begin{cases} D'=ct'_c+ct'_u=\mu ct_c+\eta ct_u & A \\ D=ct_c+ct_u=\eta ct'_c+\mu ct'_u & B \end{cases} \tag{17.15}$$

Onde para o observador O' $D'=A_u \leftrightarrow A_c$ é a distância entre as frentes de onda A_u e A_c e onde para o observador O $D=A_u \leftrightarrow A_c$ é a distância entre as frentes de onda A_u e A_c.

Nas equações acima 17.15 devido à isotropia do espaço e tempo e as frentes de onda $A_u \leftrightarrow A_c$ dos dois raios de luz ser as mesmas para ambos os observadores, a soma dos raios de luz e dos tempos deve ser invariável entre os observadores o que expressamos por:

$$D'=D \Rightarrow ct'_c+ct'_u=ct_c+ct_u \Rightarrow \sum t'=\sum t \qquad 17.16$$

Este resultado que equaciona a isotropia do espaço e tempo pode ser denominado como o princípio de conservação do espaço e do tempo.

As três hipóteses de propagações definidas a seguir serão aplicadas em 17.15 e testadas para ver se cumpre o princípio de conservação do espaço e tempo dado por 17.16:

Hipótese A:

Se o espaço e o tempo são isotrópicos e não existi nenhum movimento privilegiado de qualquer um dos observadores sobre o outro no espaço vazio, então a geometria de propagação dos raios luminosos se equaciona por:

$$|ct_c|=|ct'_u| \text{ e } |ct_u|=|ct'_c| \qquad 17.17$$

Hipótese que aplicada na equação A ou B do conjunto 17.15 atende o princípio de conservação do espaço e tempo dado por 17.16.

A hipótese 17.17 aplicada nos quadros A e B resulta em:

$$\begin{aligned} &Quadro\ A \begin{cases} ct'_c=\mu ct'_u & A \\ ct'_u=\eta ct'_c & B \end{cases} \\ &Quadro\ B \begin{cases} ct_c=\eta ct_u & C \\ ct_u=\mu ct_c & D \end{cases} \end{aligned} \qquad 17.18$$

Hipótese B:

Se o espaço e o tempo são isotrópicos porem o observador O está em repouso absoluto no espaço vazio, então a geometria de propagação dos raios luminosos se equaciona por:

$$|ct_c|=|ct_u|=|ct| \qquad 17.19$$

Que aplicada no quadro A e B resulta em:

$$\begin{aligned} &Quadro\ A \begin{cases} ct'_c=\mu ct & A \\ ct'_u=\eta ct & B \end{cases} \\ &Quadro\ B \begin{cases} ct=\eta ct'_c & C \\ ct=\mu ct'_u & D \end{cases} \end{aligned} \qquad 17.20$$

$$\begin{cases} ct'_c=\mu^2 ct'_u & A \\ ct'_u=\eta^2 ct'_c & B \end{cases} \qquad 17.21$$

Somando A e B em 17.20 obtemos:

$$ct'_c+ct'_u=2ct\left(\frac{\eta+\mu}{2}\right)\Rightarrow D'=D\left(\frac{\eta+\mu}{2}\right)\Rightarrow D'=\frac{D}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Rightarrow\sum t'=\frac{\sum t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad 17.22$$

Resultado que não concorda como o princípio de conservação do espaço e do tempo dado por 17.16 e como $D'\neq D$ é como se existissem quatro raios de luz, dois para cada observador, cada raio com sua respectiva frente de onda independente dos outros.

Hipótese C:

Se o espaço e o tempo são isotrópicos porem o observador O’ está em repouso absoluto no espaço vazio, então a geometria de propagação dos raios luminosos se equaciona por:

$$|ct'_c|=|ct'_u|=|ct'| \qquad 17.23$$

Que aplicadas nos quadros A e B resulta em:

$$\begin{array}{ll} Quadro\ A & \begin{cases} ct'=\mu ct_c & A \\ ct'=\eta ct_u & B \end{cases} \\ Quadro\ B & \begin{cases} ct_c=\eta ct' & C \\ ct_u=\mu ct' & D \end{cases} \end{array} \qquad 17.24$$

$$\begin{cases} ct_c=\eta^2 ct_u & A \\ ct_u=\mu^2 ct_c & B \end{cases} \qquad 17.25$$

Somando C e D em 17.24 obtemos:

$$ct_c+ct_u=2ct'\left(\frac{\eta+\mu}{2}\right)\Rightarrow D=D'\left(\frac{\eta+\mu}{2}\right)\Rightarrow D=\frac{D'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Rightarrow\sum t=\frac{\sum t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad 17.26$$

Resultado que exatamente como na hipótese B não concorda como o princípio de conservação do espaço e do tempo dado por 17.16 e como $D'\neq D$ é como se existissem quatro raios de luz, dois para cada observador, com cada raio com sua respectiva frente de onda independente dos outros.

Conclusão

As hipóteses A, B e C são completamente compatíveis com a exigência de isotropia do espaço e tempo como se pode concluir da geometria das propagações.

O resultado da hipótese A contradiz o resultado das hipóteses B e C apesar do movimento relativo dos observadores não alterar o movimento da frente de onda A_u relativo à frente de onda A_c porque as frentes de onda têm movimento independente uma da outra e dos observadores.

A hipótese A aplicada nas transformações de H. Lorentz atende o princípio de conservação do espaço e do tempo dado por 17.16 demonstrando a compatibilidade das transformações de H. Lorentz com a hipótese A. A aplicação das hipóteses B e C nas transformações de H. Lorentz fornece as deformações do espaço e do tempo dadas por 17.22 e 17.26 porque as transformações de H. Lorentz não são compatíveis com as hipóteses B e C.

Para obtermos o efeito de Sagnac consideremos que o observador O’ está em repouso absoluto, hipótese C acima e que o percurso dos raios seja de $2\pi R$:

$$ct'_c=ct'_u=ct'=2\pi R \qquad 17.27$$

Para o observador O o efeito de Sagnac é dado pela diferença de tempo entre o raio horário e anti-horário $\Delta t=t_c-t_u$ que pode ser obtido utilizando 17.24 (C-D), 17.27 e 17.14:

$$\Delta t = t_c - t_u = t'(\eta - \mu) = \frac{2\pi R}{c}\left(\frac{2\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{4\pi R v}{c\sqrt{c^2 - v^2}} \qquad 17.28$$

§9 O Efeito de Sagnac (continuação)

No instante em que as origens coincidem o tempo é zerado (t = t' = zero) em ambos os referenciais e dois raios de luz são emitidos a partir da origem comum, um no sentido positivo (horário índice c) dos eixos x e x' com frente de onda A_c e outro no sentido negativo (anti-horário índice u) dos eixos x e x' com frente de onda A_u.

O raio projetado no sentido positivo (horário índice c) dos eixos x e x' é equacionado por $x_c = ct_c$ e $x'_c = ct'_c$ que aplicadas no Quadro I fornece:

$$ct'_c = ct_c\left(1 - \frac{v_c}{c}\right) \Rightarrow ct'_c = ct_c K_c \ (1.7) \quad ct_c = ct'_c\left(1 + \frac{v'_c}{c}\right) \Rightarrow ct_c = ct'_c K'_c \ (1.8) \qquad 9.11$$

$$v'_c = \frac{v_c}{\left(1 - \frac{v_c}{c}\right)} \Rightarrow v'_c = \frac{v_c}{K_c} \ (1.15) \qquad v_c = \frac{v'_c}{\left(1 + \frac{v'_c}{c}\right)} \Rightarrow v_c = \frac{v'_c}{K'_c} \ (1.20) \qquad 9.12$$

Destas deduzimos que à distância entre os observadores é dada por:

$$d_c = v_c t_c = v'_c t'_c \qquad 9.13$$

Onde temos:

$$\left(1 - \frac{v_c}{c}\right)\left(1 + \frac{v'_c}{c}\right) = K_c K'_c = 1 \qquad 9.14$$

O raio projetado no sentido negativo (anti-horário índice u) dos eixos x e x' é equacionado por $x_u = -ct_u$ e $x'_u = -ct'_u$: que aplicadas no Quadro I fornece:

$$ct'_u = ct_u\left(1 + \frac{v_u}{c}\right) \Rightarrow ct'_u = ct_u K_u \ (1.7) \qquad ct_u = ct'_u\left(1 - \frac{v'_u}{c}\right) \Rightarrow ct_u = ct'_u K'_u \ (1.8) \qquad 9.15$$

$$v'_u = \frac{v_u}{\left(1 + \frac{v_u}{c}\right)} \Rightarrow v'_u = \frac{v_u}{K_u} \ (1.15) \qquad v_u = \frac{v'_u}{\left(1 - \frac{v'_u}{c}\right)} \Rightarrow v_u = \frac{v'_u}{K'_u} \ (1.20) \qquad 9.16$$

Destas deduzimos que à distância entre os observadores é dada por:

$$d_u = v_u t_u = v'_u t'_u \qquad 9.17$$

Onde temos:

$$\left(1 + \frac{v_u}{c}\right)\left(1 - \frac{v'_u}{c}\right) = K_u K'_u = 1 \qquad 9.18$$

Devemos observar que a princípio não existe nenhuma relação entra as equações 9.11 a 9.14 com as equações 9.15 a 9.18.

Com as condições de propagação descritas formamos os quadros A e B seguintes:

Quadro A

Equação	Raio horário (c) Resultado	Equação	Raio anti-horário (u) Resultado	Soma dos raios
Condição	$x_c = ct_c$	Condição	$x_u = -ct_u$	
1.2	$x'_c = ct_c K_c$	1.2	$x'_u = -ct_u K_u$	
	$x'_c = x_c K_c$		$x'_u = x_u K_u$	$x'_c + x'_u = x_c K_c + x_u K_u$
1.7	$ct'_c = ct_c K_c$	1.7	$ct'_u = ct_u K_u$	$ct'_c + ct'_u = ct_c K_c + ct_u K_u$
	$x'_c = ct'_c$		$x'_u = -ct'_u$	

Quadro B

Equação	Raio horário (c) Resultado	Equação	Raio anti-horário (u) Resultado	Soma dos raios
Condição	$x'_c = ct'_c$	Condição	$x'_u = -ct'_u$	
1.4	$x_c = ct'_c K'_c$	1.4	$x_u = -ct'_u K'_u$	
	$x_c = x'_c K'_c$		$x_u = x'_u K'_u$	$x_c + x_u = x'_c K'_c + x'_u K'_u$
1.8	$ct_c = ct'_c K'_c$	1.8	$ct_u = ct'_u K'_u$	$ct_c + ct_u = ct'_c K'_c + ct'_u K'_u$
	$x_c = ct_c$		$x_u = -ct_u$	

Observemos que para os raios de mesmo sentido os quadros A e B são inversos um do outro.

Formemos o conjunto das equações de soma dos raios dos quadros A e B:

$$\begin{cases} D' = ct'_c + ct'_u = ct_c K_c + ct_u K_u & A \\ D = ct_c + ct_u = ct'_c K'_c + ct'_u K'_u & B \end{cases} \quad 9.19$$

Onde para o observador O’ $D' = A_u \leftrightarrow A_c$ é a distância entre as frentes de onda A_u e A_c e onde para o observador O $D = A_u \leftrightarrow A_c$ é a distância entre as frentes de onda A_u e A_c.

Nas equações acima 9.19 devido à isotropia do espaço e tempo e as frentes de onda $A_u \leftrightarrow A_c$ dos dois raios de luz ser as mesmas para ambos os observadores, a soma dos raios de luz e dos tempos deve ser invariável entre os observadores o que se expressa por:

$$D' = D \Rightarrow ct'_c + ct'_u = ct_c + ct_u \Rightarrow \sum t' = \sum t \quad 9.20$$

Este resultado que equaciona a isotropia do espaço e tempo pode ser denominado como o princípio de conservação do espaço e do tempo.

As três hipóteses de propagações definidas a seguir serão aplicadas em 9.19 e testadas para ver se cumpre o princípio de conservação do espaço e tempo dado por 9.20. Com estas hipóteses criaremos vínculos entre as equações 9.11 a 9.14 com as equações 9.15 a 9.18.

Hipótese A:

Se o espaço e o tempo são isotrópicos e não existi nenhum movimento privilegiado de qualquer um dos dois observadores sobre o outro no espaço vazio, então a geometria de propagação dos raios luminosos se equaciona por:

$$\begin{cases} ct_c = ct'_u \Rightarrow t_c = t'_u \Rightarrow v_c = v'_u \Rightarrow K_c = K'_u & A \\ ct_u = ct'_c \Rightarrow t_u = t'_c \Rightarrow v_u = v'_c \Rightarrow K_u = K'_c & B \end{cases} \quad 9.21$$

Com estas deduzimos que à distância entre os observadores é dada por:

$$d_c = d_u = v_c t_c = v'_c t'_c = v_u t_u = v'_u t'_u \quad 9.22$$

Resultados que aplicados nas equações A ou B do conjunto 9.19 atende o princípio de conservação do espaço e tempo dado por 9.20. Demonstrando que o efeito Doppler nos raios horário e anti-horário se compensam nos referenciais.

Hipótese B:

Se o espaço e o tempo são isotrópicos porem o observador O está em repouso absoluto no espaço vazio, então a geometria de propagação dos raios luminosos se equaciona por:

$$\begin{cases} ct_c = ct_u = ct & A \\ v_c = v_u = v & B \\ v_c t_c = v_u t_u = vt & C \end{cases} \qquad 9.23$$

Com estas deduzimos que à distância entre os observadores é dada por:

$$d_c = d_u = vt = v'_c t'_c = v'_u t'_u \qquad 9.24$$

Resultados que aplicados nas equações A ou B do conjunto 9.19 atende o princípio de conservação do espaço e tempo dado por 9.20. Demonstrando que o efeito Doppler nos raios horário e anti-horário se compensam nos referenciais.

Hipótese C:

Se o espaço e o tempo são isotrópicos porem o observador O' está em repouso absoluto no espaço vazio, então a geometria de propagação dos raios luminosos se equaciona por:

$$\begin{cases} ct'_c = ct'_u = ct' & A \\ v'_c = v'_u = v' & B \\ v'_c t'_c = v'_u t'_u = v't' & C \end{cases} \qquad 9.25$$

Com estas deduzimos que à distância entre os observadores é dada por:

$$d_c = d_u = v't' = v_c t_c = v_u t_u \qquad 9.26$$

Resultados que aplicados nas equações A ou B do conjunto 9.19 atende o princípio de conservação do espaço e tempo dado por 9.20. Demonstrando que os efeitos Doppler nos raios horário e anti-horário se compensam nos referenciais.

Para obtermos o efeito de Sagnac consideremos que o observador O' está em repouso absoluto, hipótese C acima e que o percurso dos raios seja de $2\pi R$:

$$ct'_c = ct'_u = ct' = 2\pi R \qquad 9.27$$

Aplicando a hipótese C em 9.11 e 9.15 obtemos:

$$t_c = t'_c K'_c \Rightarrow t_c = t'\left(1 + \frac{v'}{c}\right) \qquad 9.28$$

$$t_u = t'_u K'_u \Rightarrow t_u = t'\left(1 - \frac{v'}{c}\right) \qquad 9.29$$

Para o observador O o efeito de Sagnac é dado pela diferença de tempo entre o percurso do raio horário e percurso do raio anti-horário $\Delta t = t_c - t_u$ que pode ser obtido fazendo (9.28 – 9.29) e aplicando 9.27 obtendo:

$$\Delta t = t_c - t_u = t'\left(1 + \frac{v'}{c}\right) - t'\left(1 - \frac{v'}{c}\right) = \frac{2v't'}{c} = \frac{4\pi R v'}{c^2} \qquad 9.30$$

A equação $\Delta t=\frac{2v't'}{c}=\frac{2v_c t_c}{c}=\frac{2v_u t_u}{c}$ é exatamente o resultado que se obtém da analise da geometria de propagação dois raios horário e anti-horário em uma circunferência demonstrando a coerência das hipóteses adotadas na Relatividade Ondulatória.

Em 9.30 aplicando 9.12 e 9.16 obtemos o resultado final em função de v_c e v_u:

$$\Delta t=t_c-t_u=\frac{2v't'}{c}=\frac{4\pi Rv'}{c^2}=\frac{4\pi Rv_c}{c^2-cv_c}=\frac{4\pi Rv_u}{c^2+cv_u} \qquad 9.31$$

A fórmula clássica do efeito de Sagnac é escrita como:

$$\Delta t=t_c-t_u=\frac{4\pi Rv}{c^2-v^2} \qquad 9.32$$

Da geometria de propagação temos obrigatoriamente que:

$$\Delta t=\frac{2vt}{c} \qquad 9.33$$

Os tempos clássicos seriam dados por:

$$t=\frac{2\pi R}{c} \qquad 9.34$$

$$t_c=\frac{2\pi R}{c-v} \qquad 9.35$$

$$t_u=\frac{2\pi R}{c+v} \qquad 9.36$$

Aplicando 9.34, 9.35 e 9.36 em 9.33 obtemos:

$$\Delta t=\frac{2v}{c}\frac{2\pi R}{c}=\frac{4\pi Rv}{c^2} \qquad 9.37$$

$$\Delta t_c=\frac{2v}{c}\frac{2\pi R}{(c-v)}=\frac{4\pi Rv}{c^2-cv} \qquad 9.38$$

$$\Delta t_u=\frac{2v}{c}\frac{2\pi R}{(c+v)}=\frac{4\pi Rv}{c^2+cv} \qquad 9.39$$

Os resultados 9.37, 9.38 e 9.39 são completamente diferentes de 9.32.

§18 A Experiência de Michelson & Morley

A analise tradicional que fornece a solução para o resultado nulo desta experiência considera em repouso no referencial do observador O’ um aparelho que emite dois raios de luz um horizontal na direção x’ (horário índice c) e outro vertical na direção y’. O raio horizontal (horário índice c) propaga até um espelho colocado em x’ = L neste o raio reflete (anti-horário índice u) e retorna a origem do referencial onde x’ = zero. O raio vertical propaga até um espelho colocado em y’ = L reflete e retorna a origem do referencial onde y’ = zero.

Na analise tradicional de acordo com o principio de constância da velocidade da luz para o observador O’ o percurso dois raios é dado por:

$$ct'_c=ct'_u=L \qquad 18.01$$

Para o observador O’ a soma dos tempos de percurso dois raios ao longo do eixo x’ é:

$$\sum t'_{x'} = t'_c + t'_u = \frac{L}{c} + \frac{L}{c} = \frac{2L}{c} \qquad 18.02$$

Na analise tradicional para o observador O’ a soma dos tempos de percurso dois raios ao longo do eixo y’ é:

$$\sum t'_{y'} = t'_+ + t'_- = \frac{L}{c} + \frac{L}{c} = \frac{2L}{c} \qquad 18.03$$

Como temos $\sum t'_{x'} = \sum t'_{y'} = \frac{2L}{c}$ não existe franja de interferência e está explicado o resultado nulo da experiência de Michelson & Morley.

Nesta analise tradicional o percurso idêntico dos raios horários e anti-horários contido na equação 18.01 que da origem ao resultado nulo da experiência de Michelson & Morley contraria o efeito de Sagnac que é exatamente a diferença de tempo existente entre o percurso do raio horário e o percurso do raio anti-horário.

Com base na Relatividade Ondulatória façamos uma analise mais profunda da experiência de Michelson & Morley obtendo um resultado que está completamente de acordo com o efeito de Sagnac.

Observemos que a equação 18.01 corresponde à hipótese C do parágrafo §9.

Aplicando 18.01 em 9.19 obtemos:

$$\begin{cases} D' = ct'_c + ct'_u = ct_c K_c + ct_u K_u \Rightarrow D' = L + L = ct_c K_c + ct_u K_u & A \\ D = ct_c + ct_u = ct'_c K'_c + ct'_u K'_u \Rightarrow D = ct_c + ct_u = LK'_c + LK'_u = L(K'_c + K'_u) & B \end{cases} \qquad 18.04$$

De 18.04 A obtemos:

$$D' = 2L = ct_c\left(1 - \frac{v_c}{c}\right) + ct_u\left(1 + \frac{v_u}{c}\right) \Rightarrow D' = 2L = ct_c - v_c t_c + ct_u + v_u t_u \qquad 18.05$$

Onde aplicando 9.26 obtemos:

$$D' = 2L = ct_c + ct_u \Rightarrow \sum t_x = t_c + t_u = \frac{2L}{c} \qquad 18.06$$

Em 18.04 B temos:

$$D = ct_c + ct_u = L\left[\left(1 + \frac{v'_c}{c}\right) + \left(1 - \frac{v'_u}{c}\right)\right] \qquad 18.07$$

Onde aplicando 9.25 B obtemos:

$$D = ct_c + ct_u = 2L \Rightarrow \sum t_x = t_c + t_u = \frac{2L}{c} \qquad 18.08$$

As equações 18.06 e 18.08 demonstram que o efeito Doppler nos raios horário e anti-horário se compensa no referencial do observado O resultando em:

$$\sum t'_{y'} = \sum t'_{x'} = \sum t_x = \frac{2L}{c} \qquad 18.09$$

Por isso de acordo com a Relatividade Ondulatória na experiência de Michelson & Morley podemos supor que o raio de luz horário tem percurso diferente do raio de luz anti-horário de acordo com a fórmula 18.08 obtendo também resultado nulo para a experiência e concordando então com o efeito de Sagnac. Esta suposição não pode ser feita com base na Relatividade Especial porque conforme 17.26 temos:

$$\sum t'_{x'} \neq \sum t_x \qquad 18.10$$

§19 Retrocesso do periélio de Mercúrio de -7,13”

Imaginemos o Sol situado no foco de uma elipse que coincide com a origem de um sistema de coordenadas (x,y,z) imóvel em relação às denominadas estrelas fixas e que o planeta Mercúrio em um movimento governado pela força de atração gravitacional com o Sol descreve uma órbita elíptica no plano (x,y) de acordo com as leis de Kepler e de acordo com a fórmula da lei da atração gravitacional de Newton:

$$\vec{F}=\frac{-GM_o m_o}{r^2}\hat{r}=\frac{-\left(6{,}67.10^{-11}\right)\left(1{,}98.10^{30}\right)\left(3{,}28.10^{23}\right)}{r^2}\hat{r}=\frac{-k}{r^2}\hat{r} \qquad 19.01$$

O sub índice “o” indicando massa em repouso relativo ao observador.

Para descrever o movimento utilizaremos as fórmulas conhecidas:

$$\vec{r}=r\hat{r} \qquad 19.02$$

$$\vec{u}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d(r\hat{r})}{dt}=\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi} \qquad 19.03$$

$$u^2=\vec{u}.\vec{u}=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \qquad 19.04$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2(r\hat{r})}{dt^2}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\hat{r}+\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right]\hat{\phi} \qquad 19.05$$

A fórmula da força relativista é dada por:

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_o\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\vec{a}+\frac{m_o}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{u}{c^2}\frac{du}{dt}\vec{u}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left[\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\vec{a}+\left(\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt}\right)\frac{\vec{u}}{c^2}\right] \qquad 19.06$$

Nesta o primeiro termo corresponde à variação da massa com a velocidade e o segundo como logo veremos em 19.22 corresponde à variação da energia com o tempo.

Com esta e as fórmulas anteriores obtemos:

$$\vec{F}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left\{\begin{aligned}&\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left\{\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\hat{r}+\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\hat{\phi}\right\}+\\&+\left\{\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]+r\frac{d\phi}{dt}\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\right\}\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi}\right)\end{aligned}\right\} \qquad 19.07$$

$$\vec{F}=\frac{m_o}{\left(1-u^2/c^2\right)^{3/2}}\left\{\begin{aligned}&\left\{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]+\left\{\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]+r\frac{d\phi}{dt}\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\right\}\frac{1}{c^2}\frac{dr}{dt}\right\}\hat{r}+\\&+\left\{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)+\left\{\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]+r\frac{d\phi}{dt}\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\right\}\frac{r}{c^2}\frac{d\phi}{dt}\right\}\hat{\phi}\end{aligned}\right\} \qquad 19.08$$

Nesta temos a componente transversal $\vec{F}_{\hat{\phi}}$ e radial $\vec{F}_{\hat{r}}$ dadas por:

$$\vec{F}_{\hat{r}}=\frac{m_o}{\left(1-u^2/c^2\right)^{3/2}}\left\{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]+\left\{\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]+r\frac{d\phi}{dt}\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\right\}\frac{1}{c^2}\frac{dr}{dt}\right\}\hat{r} \tag{19.09}$$

$$\vec{F}_{\hat{\phi}}=\frac{m_o}{\left(1-u^2/c^2\right)^{3/2}}\left\{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)+\left\{\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]+r\frac{d\phi}{dt}\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\right\}\frac{r}{c^2}\frac{d\phi}{dt}\right\}\hat{\phi} \tag{19.10}$$

Como a força gravitacional é central devemos ter a componente transversal nula $\vec{F}_{\hat{\phi}}=zero$ assim temos:

$$\vec{F}_{\hat{\phi}}=\frac{m_o}{\left(1-u^2/c^2\right)^{3/2}}\left\{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)+\left\{\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]+r\frac{d\phi}{dt}\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\right\}\frac{r}{c^2}\frac{d\phi}{dt}\right\}\hat{\phi}=zero \tag{19.11}$$

Desta obtemos:

$$\frac{\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)}{\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]}=\frac{\frac{-r}{c^2}\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}}{\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]} \qquad \frac{\left(2r\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r^2\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)}{r^2\frac{d\phi}{dt}}=\frac{\frac{-1}{c^2}\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]}{\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]} \tag{19.12}$$

Da componente radial $\vec{F}_{\hat{r}}$ obtemos:

$$\vec{F}_{\hat{r}}=\frac{m_o}{\left(1-u^2/c^2\right)^{3/2}}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\left\{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)+\left\{\frac{dr}{dt}+\frac{r\frac{d\phi}{dt}\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)}{\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]}\right\}\frac{1}{c^2}\frac{dr}{dt}\right\}\hat{r} \tag{19.13}$$

Nesta aplicando 19.12 temos:

$$\vec{F}_{\hat{r}}=\frac{m_o}{\left(1-u^2/c^2\right)^{3/2}}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\left\{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)+\left\{\frac{dr}{dt}-\frac{r\frac{d\phi}{dt}\left(\frac{r}{c^2}\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\right)}{\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]}\right\}\frac{1}{c^2}\frac{dr}{dt}\right\}\hat{r} \tag{19.14}$$

Que simplificada resulta em:

$$\vec{F}_{\hat{r}}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]}{\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]}\hat{r} \tag{19.15}$$

Esta igualada à força gravitacional de Newton resulta na força gravitacional relativística:

$$\vec{F}_{\hat{r}}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]}{\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]}\hat{r}=\frac{-GM_om_o}{r^2}\hat{r}=\frac{-k}{r^2}\hat{r} \tag{19.16}$$

Como a força gravitacional é central deve atender a teoria de conservação da energia (E) que é escrita como:

$E=E_k+E_p$ = constante. 19.17

Onde a energia cinética (E_k) é dada por:

$$E_k=mc^2-m_oc^2=m_oc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right) \quad 19.18$$

E a energia potencial (E_p) gravitacional por:

$$E_p=\frac{-GM_om_o}{r}=\frac{-k}{r} \quad 19.19$$

Resultando em:

$$E=m_oc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right]-\frac{k}{r}=\text{constante.} \quad 19.20$$

Como a energia total (E) é constante devemos ter:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dE_k}{dt}+\frac{dE_p}{dt}=zero\,. \quad 19.21$$

Então temos:

$$\frac{dE_k}{dt}=\frac{m_ou}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt} \quad 19.22$$

$$\frac{dE_p}{dt}=\frac{k}{r^2}\frac{dr}{dt} \quad 19.23$$

Resultando em:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dE_k}{dt}+\frac{dE_p}{dt}=zero\Rightarrow\frac{m_ou}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt}+\frac{k}{r^2}\frac{dr}{dt}=zero\Rightarrow\frac{m_ou}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt}=\frac{-k}{r^2}\frac{dr}{dt} \quad 19.24$$

Esta aplicada na força relativista 19.06 e igualada a força gravitacional 19.01 resulta em:

$$\vec{F}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\vec{a}-\frac{1}{c^2}\frac{k}{r^2}\frac{dr}{dt}\vec{u}=\frac{-k}{r^2}\hat{r} \quad 19.25$$

Nesta substituindo as variáveis anteriores obtemos:

$$\vec{F}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left\{\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\hat{r}+\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\hat{\phi}\right\}-\frac{1}{c^2}\frac{k}{r^2}\frac{dr}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi}\right)=\frac{-k}{r^2}\hat{r} \qquad 19.26$$

Desta obtemos a componente radial $\vec{F}_{\hat{r}}$ igual a:

$$\vec{F}_{\hat{r}}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]-\frac{1}{c^2}\frac{k}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{-k}{r^2} \qquad 19.27$$

Que facilmente se transforma na força gravitacional relativista 19.16.

De 19.26 obtemos a componente transversal $\vec{F}_{\hat{\phi}}$ igual a:

$$\vec{F}_{\hat{\phi}}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{k}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}=zero \qquad 19.28$$

Desta última obtemos:

$$\frac{2r\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r^2\frac{d^2\phi}{dt^2}}{r^2\frac{d\phi}{dt}}=\frac{1}{m_o}\frac{k}{c^2r^2}\frac{dr}{dt}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \qquad 19.29$$

Como a força gravitacional é central também deve atender a teoria de conservação do momento angula que é escrito como:

$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=$ constante. 19.30

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times\frac{m_o\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=r\hat{r}\times\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi}\right)=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}r^2\frac{d\phi}{dt}\left(\hat{r}\times\hat{\phi}\right)=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}r^2\frac{d\phi}{dt}\hat{k} \qquad 19.31$$

$\vec{L}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}r^2\frac{d\phi}{dt}\hat{k}=L\hat{k}$ = constante. 19.32

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d\left(L\hat{k}\right)}{dt}=\frac{d(L)\hat{k}}{dt}+\frac{Ld\left(\hat{k}\right)}{dt}=\frac{d(L)\hat{k}}{dt}=zero\Rightarrow\frac{d(L)}{dt}=zero \qquad 19.33$$

Resulta então que L é constante.

Em 19.33 fizemos $\frac{d\hat{k}}{dt}=zero$ porque o movimento é no plano (x,y).

Derivando L encontramos:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}r^2\frac{d\phi}{dt}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{m_o u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt}r^2\frac{d\phi}{dt}+\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(2r\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r^2\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)=zero \qquad 19.34$$

Desta obtemos:

$$\frac{\left(2r\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r^2\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)}{r^2\frac{d\phi}{dt}}=\frac{-u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\frac{du}{dt}\frac{1}{c^2} \qquad 19.35$$

Igualando 19.12 proveniente da teoria da força central com 19.29 proveniente da teoria de conservação da energia e 19.35 proveniente da teoria de conservação do momento angular obtemos:

$$\frac{\left(2r\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r^2\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)}{r^2\frac{d\phi}{dt}}=\frac{\frac{-1}{c^2}\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]}{\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]}=\frac{k}{m_o c^2 r^2}\frac{dr}{dt}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{-u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\frac{du}{dt}\frac{1}{c^2} \qquad 19.36$$

Das duas últimas igualdade obtemos 19.24 e das duas do meio obtemos 19.16.

Para solução das equações diferencias utilizaremos o mesmo método utilizado na teoria Newtoniana.

Façamos $w=\frac{1}{r}$ 19.37

O diferencial total desta é $dw=\frac{\partial w}{\partial r}dr \Rightarrow dw=\frac{-1}{r^2}dr$ 19.38

Desta obtemos $\frac{dw}{d\phi}=\frac{-1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}$ e $\frac{dw}{dt}=\frac{-1}{r^2}\frac{dr}{dt}$ 19.39

Do módulo do momento angular temos $\frac{d\phi}{dt}=\frac{L}{m_o r^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ 19.40

Desta obtemos $\frac{dr}{dt}=\frac{L}{m_o r^2}\frac{dr}{d\phi}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ 19.41

Nesta aplicando 19.39 obtemos $\frac{dr}{dt}=\frac{-L}{m_o}\frac{dw}{d\phi}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ 19.42

Que derivada fornece $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{d\phi}\frac{d}{dt}\left(\frac{-L}{m_o}\frac{dw}{d\phi}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)$ 19.43

Onde aplicando 19.40 e derivando obtemos:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{L}{m_or^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{-L}{m_o}\frac{dw}{d\phi}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)=\frac{-L^2}{m_o^2r^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left[\frac{d^2w}{d\phi^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+\frac{dw}{d\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)\right] \quad 19.44$$

Nesta com 19.36 a derivada do radical é assim obtida:

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{u}{c^2}\frac{du}{dt}=\frac{k}{m_oc^2r^2}\frac{dr}{dt}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=\frac{-k}{m_oc^2}\frac{dw}{dt}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) \quad 19.45$$

$$\frac{d}{d\phi}\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{u}{c^2}\frac{du}{d\phi}=\frac{k}{m_oc^2r^2}\frac{dr}{d\phi}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=\frac{-k}{m_oc^2}\frac{dw}{d\phi}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) \quad 19.46$$

Que aplicada em 19.44 fornece:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{-L^2}{m_o^2r^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left[\frac{d^2w}{d\phi^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-\frac{k}{m_oc^2}\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\right] \quad 19.47$$

Simplificada resulta:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{L^2k}{m_o^3c^2r^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2-\frac{L^2}{m_o^2r^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{d^2w}{d\phi^2} \quad 19.48$$

Encontremos a derivada segunda do ângulo derivando 19.40:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{m_or^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)=\frac{-2L}{m_or^3}\frac{dr}{dt}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+\frac{L}{m_or^2}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right) \quad 19.49$$

Nesta aplicando 19.42 e 19.45 e simplificando obtemos:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}=\frac{2L^2}{m_o^2r^3}\frac{dw}{d\phi}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)-\frac{L^2k}{m_o^3c^2r^4}\frac{dw}{d\phi}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad 19.50$$

Aplicando em 19.04 as equações 19.40 e 19.42 e simplificando obtemos:

$$u^2=\frac{L^2}{m_o^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left[\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right] \quad 19.51$$

A equação da força gravitacional relativística 19.16 remodelada fica:

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]\frac{-k}{m_or^2} \quad 19.52$$

Nesta aplicando as fórmulas acima obtemos:

$$\frac{L^2k}{m_o^3c^2r^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2-\frac{L^2}{m_o^2r^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{d^2w}{d\phi^2}-r\left(\frac{L}{m_or^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)^2=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{-L}{m_o}\frac{dw}{d\phi}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)^2\right]\frac{-k}{m_or^2}$$

$$\frac{L^2k}{m_o^3c^2r^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2-\frac{L^2}{m_o^2r^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\frac{d^2w}{d\phi^2}-\frac{L^2}{m_o^2r^3}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{-L}{m_o}\frac{dw}{d\phi}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)^2\right]\frac{-k}{m_or^2}$$

$$\frac{L^2k}{m_o^3c^2r^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2-\frac{L^2}{m_o^2r^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\frac{d^2w}{d\phi^2}-\frac{L^2}{m_o^2r^3}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{-k}{m_or^2}+\frac{L^2k}{m_o^3r^2}\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2$$

$$-\frac{L^2}{m_o^2r^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\frac{d^2w}{d\phi^2}-\frac{L^2}{m_o^2r^3}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{-k}{m_or^2}$$

$$\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}=\frac{m_ok}{L^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}=\frac{m_ok}{\left(\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}r^2\frac{d\phi}{dt}\right)^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}=\frac{m_ok\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{m_o^2r^4\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)^2=\left[\frac{k\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{m_or^4\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}\right]^2$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2+\frac{2}{r}\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{k^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{m_o^2r^8\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2+\frac{2}{r}\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{k^2}{m_o^2r^8\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}-\frac{\frac{k^2}{c^2}u^2}{m_o^2r^8\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2+\frac{2}{r}\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{k^2}{m_o^2r^8\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}-\frac{\frac{k^2}{c^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]}{m_o^2r^8\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2+\frac{2}{r}\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{k^2}{m_o^2r^8\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}-\frac{\frac{k^2}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{m_o^2r^8\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}-\frac{\frac{k^2}{c^2}\left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2}{m_o^2r^8\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2+\frac{2}{r}\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{k^2}{m_o^2r^8\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}-\frac{\frac{k^2}{c^2}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}{m_o^2r^8\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}-\frac{k^2}{m_o^2c^2r^6\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2+\frac{2}{r}\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{k^2}{m_o^2r^8\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}-\frac{\frac{k^2}{c^2}\left(-r^2\frac{dw}{d\phi}\right)^2}{m_o^2r^8\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}-\frac{k^2}{m_o^2c^2r^6\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2+\frac{2}{r}\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{k^2}{m_o^2r^8\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}-\frac{\frac{k^2}{c^2}\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2}{m_o^2r^4\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}-\frac{k^2}{m_o^2c^2r^6\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}$$

Nesta consideraremos constante o momento angular Newtoniano na forma:

$$L=r^2\frac{d\phi}{dt} \qquad 19.53$$

Que é realmente o momento angular teórico conhecido.

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2+\frac{2}{r}\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{k^2}{m_o^2L^4}-\frac{k^2}{m_o^2c^2L^2}\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2-\frac{k^2}{m_o^2c^2r^2L^2}$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2+2\frac{d^2w}{d\phi^2}2w+w^2=\frac{k^2}{m_o^2L^4}-\frac{k^2}{m_o^2c^2L^2}\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2-\frac{k^2}{m_o^2c^2L^2}w^2$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2+2\frac{d^2w}{d\phi^2}w+w^2=B-A\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2-Aw^2$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2+2\frac{d^2w}{d\phi^2}w+A\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2+(A+1)w^2-B=zero \qquad 19.54$$

Onde temos:

$$A=\frac{k^2}{m_o^2c^2L^2} \qquad 19.55$$

$$B=\frac{k^2}{m_o^2L^4} \qquad 19.56$$

A equação 19.54 tem como solução:

$$w=\frac{1}{\varepsilon D}\left[1-\varepsilon cos\left(\phi\sqrt{1+A}+\phi_o\right)\right]\Rightarrow w=\frac{1}{\varepsilon D}\left[1-\varepsilon cos(\phi Q)\right] \qquad 19.57$$

Onde consideramos $\phi_o=zero$.

Está denominado em 19.57 $Q^2=1+A$. 19.58

A equação 19.58 é função somente de A demonstrando a união intrínseca entre a variação da massa com a variação da energia no tempo, pois ambas como já descrito participam da força relativística 19.06 nisto está a essencial diferença entre a massa e a carga elétrica que é invariável e indivisível na teoria eletromagnética.

De 19.57 obtemos o raio de uma cônica:

$$r=\frac{1}{w}=\frac{\varepsilon D}{1-\varepsilon cos\left(\phi\sqrt{1+A}\right)}\Rightarrow r=\frac{\varepsilon D}{1-\varepsilon cos(\phi Q)} \qquad 19.59$$

Onde ε é a excentricidade e D a distância do foco a diretriz.

Derivando 19.57 obtemos $\frac{dw}{d\phi}=\frac{Q sen(\phi Q)}{D}$ 19.60

Que derivada resulta em $\frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{Q^2 cos(\phi Q)}{D}$ 19.61

Aplicando em 19.54 as variáveis obtemos:

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2+2\frac{d^2w}{d\phi^2}w+A\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2+(A+1)w^2-B=zero.$$

$$\frac{Q^4cos^2(\phi Q)}{D^2}+2\frac{Q^2cos(\phi Q)}{D}\left[\frac{1-\varepsilon cos(\phi Q)}{\varepsilon D}\right]+A\frac{Q^2sen^2(\phi Q)}{D^2}+(A+1)\left[\frac{1-\varepsilon cos(\phi Q)}{\varepsilon D}\right]^2-B=zero \qquad 19.62$$

$$\frac{Q^4cos^2(\phi Q)}{D^2}+2\frac{Q^2cos(\phi Q)}{\varepsilon D^2}-2\frac{Q^2cos^2(\phi Q)}{D^2}+A\frac{Q^2}{D^2}-A\frac{Q^2cos^2(\phi Q)}{D^2}+(A+1)\left[\frac{1-\varepsilon cos(\phi Q)}{\varepsilon D}\right]^2-B=zero$$

$$\frac{Q^4cos^2(\phi Q)}{D^2}+2\frac{Q^2cos(\phi Q)}{\varepsilon D^2}-2\frac{Q^2cos^2(\phi Q)}{D^2}+A\frac{Q^2}{D^2}-A\frac{Q^2cos^2(\phi Q)}{D^2}+\frac{(A+1)}{\varepsilon^2D^2}-2\frac{(A+1)cos(\phi Q)}{\varepsilon D^2}+\frac{(A+1)cos^2(\phi Q)}{D^2}-B=zero$$

$$\left(Q^4-2Q^2-AQ^2+A+1\right)\frac{cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{2Q^2}{\varepsilon D}-\frac{2A}{\varepsilon D}-\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{cos(\phi Q)}{D}+\frac{AQ^2}{D^2}+\frac{(A+1)}{\varepsilon^2D^2}-B=zero \qquad 19.63$$

Nesta aplicando no primeiro parêntese $Q^2=1+A$ obtemos:

$$\left(Q^4-2Q^2-AQ^2+A+1\right)=\left[(1+A)^2-2(1+A)-A(1+A)+A+1\right]=\left(1+2A+A^2-2-2A-A-A^2+A+1\right)=zero$$

Em 19.63 aplicando no segundo parêntese $Q^2=1+A$ obtemos:

$$\left(\frac{2Q^2}{\varepsilon D}-\frac{2A}{\varepsilon D}-\frac{2}{\varepsilon D}\right)=\left[\frac{2(1+A)}{\varepsilon D}-\frac{2A}{\varepsilon D}-\frac{2}{\varepsilon D}\right]=zero$$

O resto da equação 19.63 é portanto:

$$\frac{AQ^2}{D^2}+\frac{(A+1)}{\varepsilon^2 D^2}-B=zero \qquad 19.64$$

Os dados da órbita elíptica do planeta Mercúrio são [3]:

Excentricidade da órbita $\varepsilon=0{,}206$.

Semi-eixo maior = a = $5{,}79.10^{10}$m.

Semi-eixo menor $b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}=5{,}79.10^{10}\sqrt{1-0{,}206^2}=56.658.160.305{,}80m$.

$$\varepsilon D=a\left(1-\varepsilon^2\right)=5{,}79.10^{10}\left(1-0{,}206^2\right)=55.442.955.600{,}00m.$$

$$D=\frac{a\left(1-\varepsilon^2\right)}{\varepsilon}=\frac{5{,}79.10^{10}\left(1-0{,}206^2\right)}{0{,}206}=269.140.561.165{,}00m.$$

O período orbital da Terra (PT) e Mercúrio (PM) em torno do Sol em segundos são:

$$PT=3{,}16\,.\,10^7\,s.$$

$$PM=7{,}60\,.\,10^6\,s.$$

O número de voltas que Mercúrio (m_o) da em torno do Sol (M_o) em um século é, portanto:

$$N=100\frac{3{,}16\,.\,10^7}{7{,}60\,.\,10^6}=415{,}79. \qquad 19.65$$

Momento angular teórico de Mercúrio:

$$L^2=\left(r^2\frac{d\phi}{dt}\right)^2=GM_o a\left(1-\varepsilon^2\right)=6{,}67.10^{-11}1{,}98.10^{30}5{,}79.10^{10}\left(1-0{,}206^2\right)=7{,}32212937427.10^{30}. \qquad 19.66$$

$$A=\frac{(GM_0m_o)^2}{m_o^2c^2L^2}=\frac{(GM_0)^2}{c^2L^2}=\frac{\left(6{,}67.10^{-11}\right)^2\left(1{,}98.10^{30}\right)^2}{\left(3{,}0.10^8\right)^2\left(7{,}32.10^{30}\right)}=2{,}65.10^{-8}. \qquad 19.67$$

$$B=\frac{(GM_0m_o)^2}{m_o^2L^4}=\frac{(GM_0)^2}{L^4}=\frac{\left(6{,}67.10^{-11}\right)^2\left(1{,}98.10^{30}\right)^2}{\left(7{,}32.10^{30}\right)^2}=3{,}25.10^{-22} \qquad 19.68$$

$$Q=\sqrt{1+A}=\sqrt{1+2{,}63.10^{-8}}=1{,}000.000.013.23 \qquad 19.69$$

Aplicando os dados numéricos com várias casas decimais ao resto da equação 19.63 obtemos:

$$\frac{AQ^2}{D^2}+\frac{(A+1)}{\varepsilon^2D^2}-B=\frac{2{,}65.10^{-8}(1{,}000.000.013.23)^2}{(269.140.561.165{,}00)^2}+\frac{2{,}65.10^{-8}+1}{(55.442.955.600{,}00)^2}-3{,}25.10^{-22}=8{,}976.10^{-30} \qquad 19.70$$

Resultado que podemos considerar nulo.

Vamos obter o momento angula relativístico do resto da equação 19.63 nesta aplicando as variáveis obtemos:

$$\frac{AQ^2}{D^2}+\frac{(A+1)}{\varepsilon^2 D^2}-B=\frac{(GM_0)^2}{c^2L^2D^2}\left[1+\frac{(GM_0)^2}{c^2L^2}\right]+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\left[1+\frac{(GM_0)^2}{c^2L^2}\right]-\frac{(GM_0)^2}{L^4}=zero \qquad 19.71$$

$$\varepsilon^2L^2(GM_0)^2\left[1+\frac{(GM_0)^2}{c^2L^2}\right]+L^4c^2\left[1+\frac{(GM_0)^2}{c^2L^2}\right]-c^2\varepsilon^2D^2(GM_0)^2=zero$$

$$\varepsilon^2L^2(GM_0)^2+\varepsilon^2L^2(GM_0)^2\frac{(GM_0)^2}{c^2L^2}+L^4c^2+L^4c^2\frac{(GM_0)^2}{c^2L^2}-c^2\varepsilon^2D^2(GM_0)^2=zero$$

$$\varepsilon^2L^2(GM_0)^2+\varepsilon^2\frac{(GM_0)^4}{c^2}+L^4c^2+L^2(GM_0)^2-c^2\varepsilon^2D^2(GM_0)^2=zero$$

$$c^2L^4+(1+\varepsilon^2)(GM_0)^2L^2+\varepsilon^2\frac{(GM_0)^4}{c^2}-c^2\varepsilon^2D^2(GM_0)^2=zero \qquad 19.72$$

$$L^2=\frac{-(1+\varepsilon^2)(GM_0)^2\pm\sqrt{\left[(1+\varepsilon^2)(GM_0)^2\right]^2-4c^2\left[\varepsilon^2\frac{(GM_0)^4}{c^2}-c^2\varepsilon^2D^2(GM_0)^2\right]}}{2c^2}$$

$$L^2=\frac{-(1+\varepsilon^2)(GM_0)^2\pm\sqrt{(1+\varepsilon^2)^2(GM_0)^4-4\varepsilon^2(GM_0)^4+4c^4\varepsilon^2D^2(GM_0)^2}}{2c^2}$$

$$L^2=\frac{-(1+\varepsilon^2)(GM_0)^2\pm\sqrt{(1+2\varepsilon^2+\varepsilon^4)(GM_0)^4-4\varepsilon^2(GM_0)^4+4c^4\varepsilon^2D^2(GM_0)^2}}{2c^2}$$

$$L^2=\frac{-(1+\varepsilon^2)(GM_0)^2\pm\sqrt{(GM_0)^4+2\varepsilon^2(GM_0)^4+\varepsilon^4(GM_0)^4-4\varepsilon^2(GM_0)^4+4c^4\varepsilon^2D^2(GM_0)^2}}{2c^2}$$

$$L^2=\frac{-(1+\varepsilon^2)(GM_0)^2\pm\sqrt{(GM_0)^4+\varepsilon^4(GM_0)^4-2\varepsilon^2(GM_0)^4+4c^4\varepsilon^2D^2(GM_0)^2}}{2c^2}$$

$$L^2=\frac{-(1+\varepsilon^2)(GM_0)^2+\sqrt{(1-\varepsilon^2)^2(GM_0)^4+4c^4\varepsilon^2D^2(GM_0)^2}}{2c^2}=7,32212927328.10^{30}\ . \qquad 19.73$$

Esta última equação tem a exclusiva propriedade de relacionar a velocidade c ao denominado momento angular relativístico que é menor que o momento angular teórico 19.66.

A variação do momento angula relativístico em relação ao momento angular teórico é muito pequena e dada por:

$$\Delta L=\frac{7,32212927328.10^{30}-7,32212937427.10^{30}}{7,32212937427.10^{30}}=-1,38.10^{-8}=\frac{-1}{72.503.509,00}\ . \qquad 19.74$$

O que demonstra a exatidão do principio de constância da velocidade da luz.

Na realidade a fórmula 19.06 prevê um retrocesso secular do periélio de Mercúrio que é dado por:

$$\Delta\phi=2\pi 415{,}79\left(\frac{1}{Q}-1\right)=2\pi 415{,}79(-0{,}000.000.013.23)=-3{,}46.10^{-5}\,rad. \qquad 19.75$$

Convertendo para segundo obtemos:

$$\Delta\phi=\frac{-3{,}46.10^{-5}.180{,}00.3.600{,}00}{\pi}=-7{,}13''\,. \qquad 19.76$$

“Este retrocesso não previsto na teoria Newtoniana é devido à variação relativística da massa e energia e está encoberto pela precessão total observada de 5599”.

§§19 Avanço do periélio de Mercúrio de 42,79”

Escrevamos a fórmula para energia relativística E_R gravitacional contendo os termos para a energia cinética, a energia potencial E_p e a energia de repouso:

$$E_R=m_o c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)+E_p+m_o c^2=\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+E_p\,. \qquad 19.77$$

Sendo a força gravitacional conservativa sua energia é constante. Supondo então que em 19.77 quando o raio tende ao infinito a velocidade e a energia potencial tende a zero, resulta então:

$$E_R=\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+E_p=m_o c^2 \qquad 19.78$$

Escrevamos a fórmula para energia E_N gravitacional Newtoniana contendo os termos Newtonianos correspondentes a 19.77:

$$E_N=\frac{m_o u^2}{2}-\frac{k}{r}+m_o c^2=m_o c^2 \qquad 19.79$$

Onde $\frac{m_o u^2}{2}$ é a energia cinética, $\frac{-k}{r}$ a energia potencial e $m_o c^2$ a energia de repouso ou melhor dizendo energia inercial.

Desta 19.79 obtemos:

$$\frac{m_o u^2}{2}-\frac{k}{r}+m_o c^2=m_o c^2\Rightarrow\frac{m_o u^2}{2}=\frac{k}{r}\Rightarrow u^2=\frac{2k}{m_o r}=\frac{2GM_o m_o}{m_o r}\Rightarrow u^2=\frac{2GM_o}{r} \qquad 19.80$$

Derivando 19.79 obtemos:

$$\frac{dE_N}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_o u^2}{2}-\frac{k}{r}+m_o c^2\right)=zero$$

$$\frac{m_o 2u}{2}\frac{du}{dt}+\frac{k}{r^2}\frac{dr}{dt}=zero$$

$$u\frac{du}{dt}=\frac{-k}{m_o r^2}\frac{dr}{dt}=\frac{-GM_o}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

$$u\frac{du}{dt}=\frac{-GM_o}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

$$u\frac{du}{dr}=\frac{-GM_o}{r^2} \qquad 19.81$$

Igualando a energia relativística 19.78 a energia Newtoniana 19.79 obtemos:

$$E_R=E_N \Rightarrow \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+E_p=\frac{m_o u^2}{2}-\frac{k}{r}+m_o c^2 \qquad 19.82$$

$$\frac{m_o c^2}{m_o\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+\frac{E_p}{m_o}=\frac{m_o u^2}{m_o 2}-\frac{GM_o m_o}{m_o r}+\frac{m_o c^2}{m_o} \qquad 19.83$$

Nesta denominando o potencial relativístico (φ) como:

$$\varphi=\frac{E_p}{m_o} \qquad 19.84$$

Obtemos:

$$\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+\varphi=\frac{u^2}{2}-\frac{GM_o}{r}+c^2$$

$$\varphi=\frac{u^2}{2}-\frac{GM_o}{r}+c^2-\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad 19.85$$

Nesta substituindo a aproximação:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\approx 1+\frac{u^2}{2c^2} \qquad 19.86$$

Temos:

$$\varphi=\frac{u^2}{2}-\frac{GM_o}{r}+c^2-c^2\left(1+\frac{u^2}{2c^2}\right)$$

Que simplificada resulta no potencial Newtoniano:

$$\varphi=\frac{u^2}{2}-\frac{GM_o}{r}+c^2-c^2-\frac{u^2}{2}=\frac{-GM_o}{r} \qquad 19.87$$

Substituindo 19.84 e o potencial relativístico 19.85 na energia relativística 19.78:

$$E_R = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + m_o\left(\frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2 - \frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) \qquad 19.88$$

Obtemos a energia Newtoniana 19.79:

$$E_N = \frac{m_o u^2}{2} - \frac{GM_o m_o}{r} + m_o c^2$$

Derivando o potencial relativístico 19.85 obtemos o módulo da aceleração gravitacional relativística exatamente como na teoria newtoniana:

$$a = \frac{-d\varphi}{dr}$$

$$a = \frac{-d\varphi}{dr} = \frac{-d}{dr}\left(\frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2 - \frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)$$

$$a = \frac{-d}{dr}\left(\frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2\right) - \frac{d}{dr}\left(-\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)$$

Onde temos:

$\frac{-d}{dr}\left(\frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2\right) = \frac{-d}{dr}\left(\frac{E_N}{m_o}\right) = \mathrm{zero}$. Porque o termo a derivar é a energia Newtoniana dividida por m_o ou seja $\frac{E_N}{m_o} = \frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2$ que é constante, resulta então:

$$a = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)$$

$$a = -\left[-\frac{u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dr}\right]$$

Nesta aplicando 19.81 obtemos:

$$a = \frac{-1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{GM_o}{r^2} \qquad 19.89$$

A aceleração vetorial e dada por 19.05:

$$\vec{a}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\hat{r}+\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right]\hat{\phi}$$

O módulo da aceleração gravitacional relativística 19.89 é igual a componente do raio vetor ($\hat{r}$) por isso temos:

$$a=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]=\frac{-1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{GM_o}{r^2} \quad 19.90$$

Sendo nula a aceleração transversal temos:

$$\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right]\hat{\phi}=zero \quad 19.91$$

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}=zero$$

Que é igual à derivada do momento angular constante $L=r^2\frac{d\phi}{dt}$ 19.92

$$\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\phi}{dt}\right)=2r\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r^2\frac{d^2\phi}{dt^2}=zero \quad 19.93$$

Reescrevendo algumas equações já descritas temos:

$$w=\frac{1}{r}$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial r}dr\Rightarrow dw=\frac{-1}{r^2}dr$$

$\frac{dw}{d\phi}=\frac{-1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}$ ou $\frac{dr}{d\phi}=-r^2\frac{dw}{d\phi}$ e $\frac{dw}{dt}=\frac{-1}{r^2}\frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{d\phi}\frac{dr}{dt}=\frac{L}{r^2}\frac{dr}{d\phi}=\frac{-L}{r^2}r^2\frac{dw}{d\phi}\Rightarrow\frac{dr}{dt}=-L\frac{dw}{d\phi}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)=\frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{d\phi}\frac{d}{dt}\left(-L\frac{dw}{d\phi}\right)=\frac{L}{r^2}\frac{d}{d\phi}\left(-L\frac{dw}{d\phi}\right)=\frac{-L^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2} \quad 19.94$$

De 19.90 obtemos:

$$\left(1-\frac{3u^2}{2c^2}\right)\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]=\frac{-GM_o}{r^2}$$

Nesta com 19.94 a velocidade de 19.80 e o momento angular obtemos:

$$\left[1-\frac{3}{2c^2}\left(\frac{2GM_o}{r}\right)\right]\left[\frac{-L^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2}-r\left(\frac{L}{r^2}\right)^2\right]=-\frac{GM_o}{r^2}$$

$$\left(1-\frac{3GM_o}{c^2}\frac{1}{r}\right)\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{GM_o}{L^2}$$

$$\left(1-\frac{3GM_o}{c^2}\frac{1}{r}\right)\frac{d^2w}{d\phi^2}+\left(1-\frac{3Gm_o}{c^2}\frac{1}{r}\right)\frac{1}{r}=\frac{GM_o}{L^2}$$

$$\frac{d^2w}{d\phi^2}-\frac{3GM_o}{c^2}\frac{d^2w}{d\phi^2}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}-\frac{3GM_o}{c^2}\frac{1}{r^2}-\frac{GM_o}{L^2}=zero$$

$$\frac{d^2w}{d\phi^2}-A\frac{d^2w}{d\phi^2}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}-A\frac{1}{r^2}-B=zero$$

$$\frac{d^2w}{d\phi^2}-A\frac{d^2w}{d\phi^2}w+w-Aw^2-B=zero$$

$$\frac{d^2w}{d\phi^2}-A\frac{d^2w}{d\phi^2}w-Aw^2+w-B=zero \qquad 19.95$$

Onde temos:

$$A=\frac{3GM_o}{c^2} \quad B=\frac{GM_o}{L^2} \qquad 19.96$$

A solução da equação diferencial 19.95 é:

$$w=\frac{1}{\varepsilon D}\left[1-\varepsilon\cos(\phi Q+\phi_o)\right]\Rightarrow w=\frac{1}{\varepsilon D}\left[1-\varepsilon\cos(\phi Q)\right]. \qquad 19.97$$

Onde consideramos $\phi_o = zero$

Portanto o raio é dado por:

$$r=\frac{1}{w}=\frac{\varepsilon D}{1-\varepsilon\cos(\phi Q)}\Rightarrow r=\frac{\varepsilon D}{1-\varepsilon\cos(\phi Q)} \qquad 19.98$$

Onde ε é a excentricidade e D a distância do foco a diretriz.

Derivando 19.97 obtemos $\frac{dw}{d\phi}=\frac{Q\,sen(\phi Q)}{D}$ e $\frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{Q^2\cos(\phi Q)}{D}$ 19.99

Aplicando as derivadas em 19.95 obtemos:

$$\frac{d^2w}{d\phi^2}-A\frac{d^2w}{d\phi^2}w-Aw^2+w-B=zero$$

$$\frac{Q^2\cos(\phi Q)}{D}-\frac{AQ^2\cos(\phi Q)}{D}\frac{1}{\varepsilon D}\left[1-\varepsilon\cos(\phi Q)\right]-\frac{A}{\varepsilon^2D^2}\left[1-\varepsilon\cos(\phi Q)\right]^2+\frac{1}{\varepsilon D}\left[1-\varepsilon\cos(\phi Q)\right]-B=zero$$

$$\frac{Q^2\cos(\phi Q)}{D}-\frac{AQ^2\cos(\phi Q)}{\varepsilon D^2}\left[1-\varepsilon\cos(\phi Q)\right]-\frac{A}{\varepsilon^2D^2}\left[1-2\varepsilon\cos(\phi Q)+\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)\right]+\left[\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}\varepsilon\cos(\phi Q)\right]-B=\text{zero}$$

$$\frac{Q^2\cos(\phi Q)}{D}-\frac{AQ^2\cos(\phi Q)}{\varepsilon D^2}+\frac{AQ^2\cos(\phi Q)}{\varepsilon D^2}\varepsilon\cos(\phi Q)-$$

$$-\frac{A}{\varepsilon^2D^2}+\frac{A}{\varepsilon^2D^2}2\varepsilon\cos(\phi Q)-\frac{A}{\varepsilon^2D^2}\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)+\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}\varepsilon\cos(\phi Q)-B=\text{zero}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}\left(Q^2-\frac{AQ^2}{\varepsilon D}+\frac{2A}{\varepsilon D}-1\right)+\frac{AQ^2\cos^2(\phi Q)}{D^2}-\frac{A\cos^2(\phi Q)}{D^2}-\frac{A}{\varepsilon^2D^2}+\frac{1}{\varepsilon D}-B=\text{zero}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{AD}\left(Q^2-\frac{AQ^2}{\varepsilon D}+\frac{2A}{\varepsilon D}-1\right)+\frac{AQ^2\cos^2(\phi Q)}{AD^2}-\frac{A\cos^2(\phi Q)}{AD^2}-\frac{A}{A\varepsilon^2D^2}+\frac{1}{A\varepsilon D}-\frac{B}{A}=\text{zero}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}\left(\frac{Q^2}{A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}-\frac{1}{A}\right)+\frac{Q^2\cos^2(\phi Q)}{D^2}-\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}-\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{1}{A\varepsilon D}-\frac{B}{A}=\text{zero}$$

$$\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}\left(Q^2-1\right)+\frac{\cos(\phi Q)}{D}\left(\frac{Q^2}{A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}-\frac{1}{A}\right)-\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{1}{A\varepsilon D}-\frac{B}{A}=\text{zero} \qquad 19.100$$

O coeficiente do co-seno ao quadrado, pode ser considerado nulo porque $Q\approx 1$ e D^2 é um número muito grande:

$$\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}\left(Q^2-1\right)=\text{zero} \qquad 19.101$$

Resultando da equação 19.100:

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}\left(\frac{Q^2}{A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}-\frac{1}{A}\right)-\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{1}{A\varepsilon D}-\frac{B}{A}=\text{zero} \qquad 19.102$$

Devido à unicidade desta equação 19.102 devemos ter uma única solução que anule simultaneamente o parêntese e o resto da equação, ou seja, devemos ter uma solução única para ambas às equações seguintes:

$$\frac{Q^2}{A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}-\frac{1}{A}=\text{zero} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{1}{A\varepsilon D}-\frac{B}{A}=\text{zero} \qquad 19.103$$

Estás equações podem ser escritas como:

$$[a=b]\Rightarrow\frac{1}{A}-\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{1}{Q^2}\left(\frac{1}{A}-\frac{2}{\varepsilon D}\right) \qquad 19.104$$

$$[a=c]\Rightarrow\frac{1}{A}-\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{\varepsilon DB}{A} \qquad 19.105$$

Nestas o termo comum $a=\frac{1}{A}-\frac{1}{\varepsilon D}$ deve ter uma única solução por isso temos:

$$[b=c]\Rightarrow\frac{1}{Q^2}\left(\frac{1}{A}-\frac{2}{\varepsilon D}\right)=\frac{\varepsilon DB}{A} \qquad 19.106$$

Com 19.96 e o momento teórico obtemos:

$$A=\frac{3GM_{\circ}}{c^2} \quad B=\frac{GM_{\circ}}{L^2} \quad L^2=\varepsilon DGM_{\circ} \qquad \varepsilon DB=\frac{\varepsilon DGM_{\circ}}{L^2}=1 \tag{19.107}$$

Está aplicada em 19.105 e 19.106 resulta em:

$$[a=c]\Rightarrow\frac{1}{A}-\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{1}{A} \tag{19.108}$$

$$[b=c]\Rightarrow\frac{1}{Q^2}\left(\frac{1}{A}-\frac{2}{\varepsilon D}\right)=\frac{1}{A} \tag{19.109}$$

De 19.108 obtemos o erro cometido em 19.105:

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{1}{A}\Rightarrow-\frac{1}{\varepsilon D}\approx\text{zero} \tag{19.110}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{-1}{55.442.955.600{,}00}=-1{,}80.10^{-11}\approx\text{zero} \tag{19.111}$$

De 19.109 obtemos Q:

$$\frac{1}{Q^2}\left(\frac{1}{A}-\frac{2}{\varepsilon D}\right)=\frac{1}{A}\Rightarrow Q^2=1-\frac{2A}{\varepsilon D}\Rightarrow Q^2=1-\frac{2}{\varepsilon D}\frac{3GM_{\circ}}{c^2} \tag{19.112}$$

Está aplicada em 19.104 resulta em 19.110:

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{1}{Q^2}\left(\frac{1}{A}-\frac{2}{\varepsilon D}\right)\Rightarrow\frac{1}{A}-\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{1}{\left(1-\frac{2A}{\varepsilon D}\right)}\left(\frac{1}{A}-\frac{2}{\varepsilon D}\right)\Rightarrow\frac{1}{A}-\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{1}{A}\Rightarrow-\frac{1}{\varepsilon D}\approx\text{zero}$$

De 19.112 temos:

$$Q=\sqrt{1-\frac{6GM_{\circ}}{\varepsilon Dc^2}}=\sqrt{1-\frac{6(6{,}67.10^{-11})(1{,}98.10^{30})}{(55.442.955.600{,}00)(3.10^8)^2}}=0{,}999.999.920.599 \tag{19.113}$$

Que corresponde a um avanço do periélio de Mercúrio em um século de:

$$\sum\Delta\phi=\Delta\phi.\,415{,}79=\left(\frac{1}{Q}-1\right).1.296.000{,}00.415{,}79=42{,}79'' \tag{19.114}$$

Calculado dessa forma:

Em uma volta trigonométrica temos $360\times60\times60=1.296.000{,}00''$ segundos.

O ângulo ϕ em segundos percorrido pelo planeta em uma volta trigonométrica é dado por:

$$\phi Q=1.296.000{,}00\Rightarrow\phi=\frac{1.296.000{,}00}{Q}.$$

Se $Q>1{,}00$ temos retrocesso. $\phi<1.296.000{,}00$.

Se $Q<1{,}00$ temos avanço. $\phi>1.296.000{,}00$.

A variação angular em segundos em uma volta é dada por:

$$\Delta\phi = \frac{1.296.000{,}00}{Q} - 1.296.000{,}00 = \left(\frac{1}{Q} - 1\right) 1.296.000{,}00.$$

Se $\Delta\phi < zero$ temos retrocesso.

Se $\Delta\phi > zero$ temos avanço.

Em um século temos 415,79 voltas que fornecem uma variação angular total de:

$$\sum \Delta\phi = \Delta\phi.\ 415{,}79 = \left(\frac{1}{Q} - 1\right).1.296.000{,}00.415{,}79 = 42{,}79''$$

Se $\sum \Delta\phi < zero$ temos retrocesso.

Se $\sum \Delta\phi > zero$ temos avanço.

§20 Inércia

Imagine em um universo totalmente vazio, um ponto O' que seja a origem do referencial do observador O'. Na hipótese de o referencial estar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme as ondas eletromagnéticas esféricas emitidas com velocidade c por uma fonte situada em O' será observada por O' devido à lei de inércia exatamente esférica e com velocidade c portanto, o movimento retilíneo uniforme e o repouso são indistinguível um do outro permanecendo em ambos os casos valida a lei de inércia. Para o observador O' as equações da teoria eletromagnética descreverão a propagação exatamente como uma onda esférica. A imagem de um objeto situado em O' será sempre centrada no próprio objeto e um raio de luz emitido de O' permanecerá sempre retilíneo e perpendicular às ondas esféricas.
Imagine agora um outro ponto O que seja a origem do referencial do observador O que possui todas as propriedades inerciais descritas para o observador O'.
Obviamente dois pontos imaginários sem nenhuma forma de interação entre eles permanecerão individualmente e no conjunto atendendo perfeitamente a lei de inércia mesmo existindo um movimento retilíneo uniforme entre eles, só observável, devido à presença de ambos os referenciais que individualmente se observarão em repouso estando em movimento o outro referencial.
As propriedades destes dois observadores são descritas pelas equações de transformações relativísticas.
Observação: um universo infinito é aquele em que qualquer ponto pode ser considerado o ponto central deste universo.

§20 Inércia (esclarecimentos)

Imagine em um universo infinito totalmente vazio um único ponto O. Devido às propriedades de unicidade de O um raio de luz emitido de O deve propagar obrigatoriamente com velocidade c. Na hipótese de este raio propagar em linha reta, então se define O como a origem de um referencial inercial porque ou está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Entretanto na hipótese da propagação do raio de luz ser uma curva o movimento de O deve obrigatoriamente ser interpretado como a origem de um referencial acelerado. Portanto a propagação de um raio de luz é suficiente para demonstrar se O é a origem de um referencial inercial ou de um referencial acelerado.
Imagine agora se no universo acima descrito para o referencial inercial O exista outro referencial inercial O' que não possui qualquer tipo de interação física com O. Não existindo qualquer interação entre O e O' as propriedades de unicidade são invioláveis para ambos os pontos e os raios de luz emitidos de O e O' têm a mesma velocidade c. É impossível que a velocidade da luz emitida de O seja diferente da velocidade da luz emitida de O' porque cada referencial existe como se o outro não existisse. Sendo O e O' a origem de referenciais inerciais a propagação dos raios de luz ocorre em linha reta com velocidade c e as relações entre os tempos t e t' de cada referencial são dadas pelo quadro I.

§21 Avanço do Periélio de Mercúrio de 42,79” calculado com a Relatividade Ondulatória

Supondo $ux=v$

(2.3) $u'x'=\dfrac{ux-v}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{c^2}-\dfrac{2vux}{c^2}}}=\dfrac{v-v}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{c^2}-\dfrac{2vv}{c^2}}}\Rightarrow u'x'=zero$

$$ux=v \qquad u'x'=zero \tag{21.01}$$

(1.17) $dt'=dt\sqrt{1+\dfrac{v^2}{c^2}-\dfrac{2vux}{c^2}}=dt\sqrt{1+\dfrac{v^2}{c^2}-\dfrac{2vv}{c^2}}\Rightarrow dt'=dt\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$

(1.22) $dt=dt'\sqrt{1+\dfrac{v'^2}{c^2}+\dfrac{2v'u'x'}{c^2}}=dt'\sqrt{1+\dfrac{v'^2}{c^2}+\dfrac{2v'(0)}{c^2}}\Rightarrow dt=dt'\sqrt{1+\dfrac{v'^2}{c^2}}$

$$dt'=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad dt=dt'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} \tag{21.02}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}=1 \tag{21.03}$$

$$v=\frac{v'}{\sqrt{1+\dfrac{v'^2}{c^2}}} \qquad v'=\frac{v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{21.04}$$

$$dt>dt' \qquad v<v' \qquad vdt=v'dt' \tag{21.05}$$

(1.33) $\vec{v}=\dfrac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\dfrac{v'^2}{c^2}+\dfrac{2v'u'x'}{c^2}}}=\dfrac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\dfrac{v'^2}{c^2}+\dfrac{2v'(0)}{c^2}}}\Rightarrow\vec{v}=\dfrac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\dfrac{v'^2}{c^2}}}$

(1.34) $\vec{v}'=\dfrac{-\vec{v}}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{c^2}-\dfrac{2vux}{c^2}}}=\dfrac{-\vec{v}}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{c^2}-\dfrac{2vv}{c^2}}}\Rightarrow\vec{v}'=\dfrac{-\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

$$\vec{v}=\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\dfrac{v'^2}{c^2}}} \qquad -\vec{v}'=\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{21.06}$$

$$\vec{r}=r\hat{r}=-\vec{r}' \qquad \vec{r}'=-r\hat{r}=-\vec{r} \qquad |\vec{r}|=|\vec{r}'|=r \tag{21.07}$$

$$d\vec{r}=dr\hat{r}+rd\hat{r}=-d\vec{r}' \qquad d\vec{r}'=-dr\hat{r}-rd\hat{r}=-d\vec{r} \tag{21.08}$$

$$\hat{r}d\vec{r}=dr\hat{r}\hat{r}+r\hat{r}d\hat{r}=dr \qquad \hat{r}d\vec{r}'=-dr\hat{r}\hat{r}-r\hat{r}d\hat{r}=-dr \tag{21.09}$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d(r\hat{r})}{dt}=\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi} \qquad v^2=\vec{v}\vec{v}=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \tag{21.10}$$

$$\vec{v}'=\frac{d\vec{r}'}{dt'}=\frac{d(-r\hat{r})}{dt'}=-\left(\frac{dr}{dt'}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt'}\hat{\phi}\right) \qquad v'^2=\vec{v}'\vec{v}'=\left(\frac{dr}{dt'}\right)^2+\left(r\frac{d\phi}{dt'}\right)^2 \tag{21.11}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2(r\hat{r})}{dt^2}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\hat{r}+\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\hat{\phi} \quad 21.12$$

$$\vec{a}'=\frac{d\vec{v}'}{dt'}=\frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2}=\frac{d^2(-r\hat{r})}{dt'^2}=-\left[\frac{d^2r}{dt'^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt'}\right)^2\right]\hat{r}-\left(2\frac{dr}{dt'}\frac{d\phi}{dt'}+r\frac{d^2\phi}{dt'^2}\right)\hat{\phi} \quad 21.13$$

$$-\vec{v}'=\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad 21.06$$

$$-\vec{a}'=\frac{d(-\vec{v}')}{dt'}=\frac{d}{dt'}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \quad 21.14$$

$$-\vec{a}'=-\frac{d\vec{v}'}{dt'}=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\left[\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}}{dt}-\vec{v}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\right]$$

$$-\vec{a}'=-\frac{d\vec{v}'}{dt'}=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\left[\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}}{dt}-\vec{v}\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}=\frac{-1}{2}}\left(\frac{-2v}{c^2}\frac{dv}{dt}\right)\right]$$

$$-\vec{a}'=-\frac{d\vec{v}'}{dt'}=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v\frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right)$$

$$-\vec{a}'=-\frac{d\vec{v}'}{dt'}=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v\frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right)$$

$$-\vec{a}'=-\frac{d\vec{v}'}{dt'}=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}}{dt}+v\frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right]$$

$$-m'\vec{a}'=\frac{-m_o\vec{a}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{-m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}'}{dt'}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}}{dt}+v\frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right]$$

$$\vec{F}'=-m'\vec{a}'=\frac{-m_o\vec{a}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{-m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}'}{dt'} \qquad 21.15$$

$$\vec{F}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}}{dt}+v\frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right] \qquad (=19.06) \qquad 21.16$$

$$\vec{F}'=-m'\vec{a}'=\frac{-m_o\vec{a}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{-m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}'}{dt'}=\vec{F}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}}{dt}+v\frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right] \qquad 21.17$$

$$E_k=\int\vec{F}'(-d\vec{r}')=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int\frac{-k}{r^2}\hat{r}d\vec{r} \qquad 21.18$$

$$E_k=\int\vec{F}'.(-d\vec{r}')=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int\frac{-m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}'}{dt'}(-d\vec{r}')=\int\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}}{dt}+v\frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right]d\vec{r}=\int\frac{-k}{r^2}\hat{r}.d\vec{r} \qquad 21.19$$

$$E_k=\int\frac{m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}d\vec{v}'\frac{d\vec{r}'}{dt'}=\int\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)d\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt}+vdv\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right]=\int\frac{-k}{r^2}\hat{r}.d\vec{r}$$

$$E_k=\int\frac{m_od\vec{v}'\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\int\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)d\vec{v}\vec{v}+vdv\frac{\vec{v}\vec{v}}{c^2}\right]=\int\frac{-k}{r^2}\hat{r}.d\vec{r}$$

$$E_k=\int\frac{m_ov'dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\int\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)vdv+vdv\frac{v^2}{c^2}\right]=\int\frac{-k}{r^2}dr$$

$$E_k=\int\frac{m_ov'dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\int\frac{m_ovdv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\right)=\int\frac{-k}{r^2}dr$$

$$E_k=\int\frac{m_ov'dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\int\frac{m_ovdv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{-k}{r^2}dr \qquad dE_k=\frac{m_ov'dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{m_ovdv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-k}{r^2}dr \qquad 21.20$$

$$E_k=m_oc^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}=\frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{k}{r}+constante \qquad 21.21$$

$$E_R=m_oc^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}-\frac{k}{r}=constante \qquad E_R=\frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{k}{r}=constante \qquad 21.22$$

$$E_R=\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{k}{r}=m_o c^2+\frac{m_o v^2}{2}-\frac{k}{r} \qquad E_R=\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{(0)^2}{c^2}}}-\frac{k}{\infty}=m_o c^2 \tag{21.23}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{E_R}{m_o c^2}+\frac{k}{m_o c^2}\frac{1}{r} \qquad H=\frac{E_R}{m_o c^2} \qquad A=\frac{k}{m_o c^2}=\frac{GM_o m_o}{m_o c^2}=\frac{GM_o}{c^2} \tag{21.24}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=H+A\frac{1}{r} \qquad \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3 \tag{21.25}$$

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{v}=r\hat{r}\times\left(\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi}\right)=r^2\frac{d\phi}{dt}\left(\hat{r}\times\hat{\phi}\right)=r^2\frac{d\phi}{dt}\hat{k} \tag{21.26}$$

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{v}=\vec{r}\times\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=r\hat{r}\times\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\left[\left(-\frac{dr}{dt'}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt'}\hat{\phi}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}r^2\frac{d\phi}{dt'}\left(\hat{r}\times\hat{\phi}\right)=r^2\frac{d\phi}{dt}\hat{k} \tag{21.26}$$

$$\vec{L}=r^2\frac{d\phi}{dt}\vec{k}=L\hat{k} = \text{constante} \qquad L=r^2\frac{d\phi}{dt} \tag{21.27}$$

$$dE_k=\frac{m_o v' dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{m_o v dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-k}{r^2}dr=\frac{-k}{r^2}\hat{r}.d\vec{r} \tag{21.20}$$

$$\frac{dE_k}{dt}=\vec{F}\vec{v}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{-k}{r^2}\hat{r}.\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{-k}{r^2}\hat{r}.\vec{v}$$

$$\vec{F}=\frac{m_o\vec{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-k}{r^2}\hat{r} \tag{21.28}$$

$$\vec{F}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\hat{r}+\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\hat{\phi}\right\}=\frac{-k}{r^2}\hat{r} \tag{21.29}$$

$$\vec{F}_{\hat{\phi}}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\hat{\phi}=zero \tag{21.30}$$

$$\vec{F}_{\hat{r}}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\hat{r}=\frac{-k}{r^2}\hat{r} \tag{21.31}$$

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{L}{r^2} \qquad \frac{dr}{dt}=-L\frac{dw}{d\phi} \qquad \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{-L^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2} \qquad \frac{d^2\phi}{dt^2}=\frac{2L^2}{r^3}\frac{dw}{d\phi} \tag{21.32}$$

$$\vec{F}_{\hat{r}}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{-L^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2}-r\left(\frac{L}{r^2}\right)^2\right]\hat{r}=\frac{-k}{r^2}\hat{r} \tag{21.33}$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{-L^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2}-\frac{L^2}{r^3}\right)=\frac{-GM_o}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{-L^2}{r^2}\right)=\frac{-GM_o}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{GM_o}{L^2} \tag{21.34}$$

$$\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{GM_o}{L^2} \tag{21.35}$$

$$\left(H+3A\frac{1}{r}\right)\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{GM_o}{L^2}$$

$$H\frac{d^2w}{d\phi^2}+H\frac{1}{r}+3A\frac{d^2w}{d\phi^2}\frac{1}{r}+3A\frac{1}{r^2}=\frac{GM_o}{L^2}$$

$$H\frac{d^2w}{d\phi^2}+Hw+3A\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3Aw^2-\frac{GM_o}{L^2}=zero$$

$$H=\frac{E_R}{m_oc^2} \qquad A=\frac{k}{m_oc^2}=\frac{GM_om_o}{m_oc^2}=\frac{GM_o}{c^2} \qquad B=\frac{GM_o}{L^2} \tag{21.36}$$

$$H\frac{d^2w}{d\phi^2}+Hw+3A\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3Aw^2-B=zero \tag{21.37}$$

$$w=\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)] \qquad \frac{dw}{d\phi}=\frac{-Q sen(\phi Q)}{D} \qquad \frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D} \tag{21.38}$$

$$H\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}+H\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]+3A\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]+3A\left\{\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]\right\}^2-B=zero \tag{21.39}$$

$$-Q^2H\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H\frac{1}{\varepsilon D}+H\frac{1}{\varepsilon D}\varepsilon\cos(\phi Q)-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}\left[1+2\varepsilon\cos(\phi Q)+\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)\right]-B=zero$$

$$-Q^2H\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H\frac{1}{\varepsilon D}+H\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}\varepsilon\cos(\phi Q)+$$
$$+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}2\varepsilon\cos(\phi Q)+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)-B=zero$$

$$-Q^2H\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H\frac{1}{\varepsilon D}+H\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-3Q^2A\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}+\frac{6A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+3A\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}-B=zero$$

$$-Q^2H\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{6A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-$$
$$-3Q^2A\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+3A\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+H\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}-B=zero$$

$$\left(-Q^2H+H-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}+\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\left(-3Q^2A+3A\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+H\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}-B=zero$$

$$\left(-3Q^2A+3A\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{3AD^2}+\left(-Q^2H+H-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}+\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{3AD}+H\frac{1}{3A\varepsilon D}+\frac{3A}{3A\varepsilon^2D^2}-\frac{B}{3A}=zero$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{-Q^2H}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{B}{3A}=zero \qquad 21.40$$

$$Q^2\approx 1 \qquad \left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}=zero \qquad 21.41$$

$$\left(\frac{-Q^2H}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{B}{3A}=zero \qquad 21.42$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=zero\Rightarrow\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{B}{3A}=zero$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}\neq zero\Rightarrow\frac{-Q^2H}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}=zero$$

$$\frac{-Q^2H}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}=zero \qquad \frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{B}{3A}=zero \qquad 21.43$$

$$[a=b]\Rightarrow\frac{H}{3A}+\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{1}{Q^2}\left(\frac{H}{3A}+\frac{2}{\varepsilon D}\right) \qquad [a=c]\Rightarrow\frac{H}{3A}+\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{\varepsilon DB}{3A} \qquad 21.44$$

$$Q^2=1 \qquad H=\frac{E_R}{m_oc^2}=\frac{m_oc^2}{m_oc^2}=1 \qquad \varepsilon DB=\frac{\varepsilon DGM_o}{L^2}=\frac{\varepsilon DGM_o}{\varepsilon DGM_o}=1$$

$$[a=b]\Rightarrow\frac{H}{3A}+\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{1}{1}\left(\frac{H}{3A}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon D}=zero \qquad [a=c]\Rightarrow\frac{1}{3A}+\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{1}{3A}\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon D}=zero$$

$$[b=c]\Rightarrow\frac{1}{Q^2}\left(\frac{H}{3A}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)=\frac{\varepsilon DB}{3A} \qquad 21.45$$

$$\varepsilon DB=\frac{\varepsilon DGM_o}{L^2}=\frac{\varepsilon DGM_o}{\varepsilon DGM_o}=1 \qquad 21.46$$

$$[b=c]\Rightarrow\frac{1}{Q^2}\left(\frac{H}{3A}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)=\frac{1}{3A} \qquad Q^2=H+\frac{6A}{\varepsilon D} \qquad 21.47$$

$Q=Q(H)$ O retrocesso é função da energia positiva que governa o movimento.

$$H=\frac{E_R}{m_oc^2}=\frac{m_oc^2}{m_oc^2}=1 \qquad Q^2=1+\frac{6A}{\varepsilon D}\ \text{Retrocesso} \qquad 21.48$$

$$[a=b]\Rightarrow\frac{1}{3A}+\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{1}{\left(1+\frac{6A}{\varepsilon D}\right)}\left(\frac{1}{3A}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon D}=zero \qquad 21.49$$

$$3A\varepsilon D\left(\frac{-Q^2H}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)=zero \qquad 3A\varepsilon^2D^2\left(\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{B}{3A}\right)=zero \qquad 21.43$$

$$H=\frac{E_R}{m_oc^2} \qquad A=\frac{GM_o}{c^2} \qquad B=\frac{GM_o}{L^2}$$

$$-Q^2H\varepsilon D+H\varepsilon D-Q^23A+6A=zero \qquad H\varepsilon D+3A-\varepsilon D(\varepsilon DB)=zero$$

$$-Q^2(-3A+\varepsilon D)-3A+\varepsilon D-Q^23A+6A=zero \qquad H\varepsilon D=-3A+\varepsilon D$$

$$Q^23A-Q^2\varepsilon D+\varepsilon D-Q^23A+3A=zero$$

$$-Q^2\varepsilon D+\varepsilon D+3A=zero \qquad Q^2=1+\frac{3A}{\varepsilon D}$$

Este retrocesso não é governado pela energia positiva.

$$\vec{v}=\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad 21.06$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\right)=\frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\left(\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\right)=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d}{dt'}\left(\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\right) \qquad 21.50$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{-1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)}\left[\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}'}{dt'}-\vec{v}'\frac{d}{dt'}\left(\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\right)\right]$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{-1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)}\left[\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}'}{dt'}-\vec{v}'\frac{1}{2}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}=\frac{-1}{2}}\left(\frac{2v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}\right)\right]$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{-1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)}\left(\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}'}{dt'}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right)$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{-1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}'}{dt'}\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right)$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{-1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'}-v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right]$$

$$m\vec{a}=\frac{m_o\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{-m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'}-v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right]$$

$$\vec{F}=m\vec{a}=\frac{m_o\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad 21.51$$

$$\vec{F}'=\frac{-m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'}-v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right] \qquad 21.52$$

$$\vec{F}=m\vec{a}=\frac{m_o\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}'=\frac{-m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'}-v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right] \qquad 21.53$$

$$E_k=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int\vec{F}'.(-d\vec{r}')=\int\frac{-k}{r^2}\hat{r}(-d\vec{r}') \qquad 21.54$$

$$E_k=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int\vec{F}'.(-d\vec{r}')=\int\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r}=\int\frac{-m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'}-v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right](-d\vec{r}')=\int\frac{-k}{r^2}\hat{r}(-d\vec{r}') \qquad 21.55$$

$$E_k=\int\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}d\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt}=\int\frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)d\vec{v}'\frac{d\vec{r}'}{dt'}-v'dv'\frac{d\vec{r}'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right]=\int\frac{k}{r^2}\hat{r}d\vec{r}'$$

$$E_k=\int\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}d\vec{v}\vec{v}=\int\frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)d\vec{v}'\vec{v}'-v'dv'\frac{\vec{v}'\vec{v}'}{c^2}\right]=\int\frac{-k}{r^2}dr$$

$$E_k=\int\frac{m_o v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\int\frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)d\vec{v}'\vec{v}'-v'dv'\frac{v'^2}{c^2}\right]=\int\frac{-k}{r^2}dr$$

$$E_k=\int\frac{m_o v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\int\frac{m_o v' dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}-\frac{v'^2}{c^2}\right)=\int\frac{-k}{r^2}dr$$

$$E_k=\int\frac{m_o v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\int\frac{m_o v' dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{-k}{r^2}dr \qquad dE_k=\frac{m_o v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_o v' dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-k}{r^2}dr \qquad 21.56$$

$$E_k=-m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{-m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{k}{r}+constante \qquad 21.57$$

$$E_R=-m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{k}{r}=constante \qquad E_R=\frac{-m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}-\frac{k}{r}=constante \qquad 21.58$$

$$E_R=\frac{-m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}-\frac{k}{r}=-m_o c^2+\frac{m_o v'^2}{2}-\frac{k}{r} \qquad E_R=\frac{-m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{(0)^2}{c^2}}}-\frac{k}{\infty}=-m_o c^2 \qquad 21.59$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{E_R}{m_o c^2}+\frac{k}{m_o c^2}\frac{1}{r} \qquad 21.60$$

$$H=\frac{E_R}{m_o c^2} \qquad A=\frac{k}{m_o c^2}=\frac{GM_o m_o}{m_o c^2}=\frac{GM_o}{c^2} \qquad 21.61$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=H+A\frac{1}{r} \qquad \frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3 \qquad 21.62$$

$$\vec{L}'=\vec{r}'\times\vec{v}'=-r\hat{r}\times\left[-\left(\frac{dr}{dt'}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt'}\hat{\phi}\right)\right]=r^2\frac{d\phi}{dt'}\left(\hat{r}\times\hat{\phi}\right)=r^2\frac{d\phi}{dt'}\hat{k} \qquad 21.63$$

$$\vec{L}'=\vec{r}'\times\vec{v}'=-\vec{r}\times\frac{-\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=r\hat{r}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\left(\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}r^2\frac{d\phi}{dt}\left(\hat{r}\times\hat{\phi}\right)=r^2\frac{d\phi}{dt'}\hat{k} \qquad 21.63$$

$$\vec{L}'=r^2\frac{d\phi}{dt'}\vec{k}=L'\hat{k} \qquad L'=r^2\frac{d\phi}{dt'} \qquad 21.64$$

$$dE_k = \frac{m_o v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_o v' dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-k}{r^2}dr = \frac{k}{r^2}\hat{r}d\vec{r}' \tag{21.56}$$

$$\frac{dE_k}{dt'} = \vec{F}'\vec{v}' = \frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} v' \frac{dv'}{dt'} = \frac{k}{r^2}\hat{r}\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{k}{r^2}\hat{r}\vec{v}'$$

$$\vec{F}' = \frac{m_o \vec{a}'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{r^2}\hat{r} \tag{21.65}$$

$$\vec{F}' = \frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left\{ -\left[\frac{d^2r}{dt'^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt'}\right)^2\right]\hat{r} - \left(2\frac{dr}{dt'}\frac{d\phi}{dt'} + r\frac{d^2\phi}{dt'^2}\right)\hat{\phi} \right\} = \frac{k}{r^2}\hat{r} \tag{21.66}$$

$$\vec{F}'_{\hat{\phi}} = \frac{-m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(2\frac{dr}{dt'}\frac{d\phi}{dt'} + r\frac{d^2\phi}{dt'^2}\right)\hat{\phi} = zero \tag{21.67}$$

$$\vec{F}'_{\hat{r}} = \frac{-m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{d^2r}{dt'^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt'}\right)^2\right]\hat{r} = \frac{k}{r^2}\hat{r} \tag{21.68}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{d^2r}{dt'^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt'}\right)^2\right]\hat{r} = \frac{-GM_o}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{d\phi}{dt'} = \frac{L'}{r^2} \qquad \frac{dr}{dt'} = -L'\frac{dw}{d\phi} \qquad \frac{d^2r}{dt'^2} = \frac{-L'^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2} \qquad \frac{d^2\phi}{dt'^2} = \frac{2L'^2}{r^3}\frac{dw}{d\phi} \tag{21.69}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{-L'^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2} - r\left(\frac{L'}{r^2}\right)^2\right] = \frac{-GM_o}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{-L'^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2} - \frac{L'^2}{r^3}\right) = \frac{-GM_o}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{d^2w}{d\phi^2} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{-L'^2}{r^2}\right) = \frac{-GM_o}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{GM_o}{L'^2} \qquad 21.70$$

$$-\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{GM_o}{L'^2} \qquad 21.71$$

$$\left(H+3A\frac{1}{r}\right)\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{-GM_o}{L'^2}$$

$$H\frac{d^2w}{d\phi^2}+H\frac{1}{r}+3A\frac{d^2w}{d\phi^2}\frac{1}{r}+3A\frac{1}{r^2}=\frac{-GM_o}{L'^2}$$

$$H\frac{d^2w}{d\phi^2}+Hw+3A\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3Aw^2+\frac{GM_o}{L'^2}=zero$$

$$H=\frac{E_R}{m_oc^2} \qquad A=\frac{GM_o}{c^2} \qquad B=\frac{GM_o}{L'^2} \qquad 21.72$$

$$H\frac{d^2w}{d\phi^2}+Hw+3A\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3Aw^2+B=zero \qquad 21.73$$

$$w=\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)] \qquad \frac{dw}{d\phi}=\frac{-Qsen(\phi Q)}{D} \qquad \frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D} \qquad 21.38$$

$$H\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}+H\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]+3A\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]+3A\left\{\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]\right\}^2+B=zero \qquad 21.74$$

$$-Q^2H\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H\frac{1}{\varepsilon D}+H\frac{1}{\varepsilon D}\varepsilon\cos(\phi Q)-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}\left[1+2\varepsilon\cos(\phi Q)+\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)\right]+B=zero$$

$$-Q^2H\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H\frac{1}{\varepsilon D}+H\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}\varepsilon\cos(\phi Q)+$$
$$+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}2\varepsilon\cos(\phi Q)+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)+B=zero$$

$$-Q^2H\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H\frac{1}{\varepsilon D}+H\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-3Q^2A\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}+\frac{6A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+3A\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+B=zero$$

$$-Q^2H\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{6A}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-$$
$$-3Q^2A\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+3A\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+H\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}+B=zero$$

$$\left(-Q^2H+H-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}+\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\left(-3Q^2A+3A\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+H\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}+B=zero$$

$$\left(-3Q^2A+3A\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{3AD^2}+\left(-Q^2H+H-\frac{3Q^2A}{\varepsilon D}+\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{3AD}+H\frac{1}{3A\varepsilon D}+\frac{3A}{3A\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3A}=zero$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{-Q^2H}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3A}=zero \qquad 21.75$$

$$Q^2\approx 1 \qquad \left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}=zero \qquad 21.76$$

$$\left(\frac{-Q^2H}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3A}=zero \qquad 21.77$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=zero\Rightarrow\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3A}=zero$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}\neq zero\Rightarrow\frac{-Q^2H}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}=zero$$

$$\frac{-Q^2H}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}=zero \qquad \frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3A}=zero \qquad 21.78$$

$$[a=b]\Rightarrow\frac{H}{3A}+\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{1}{Q^2}\left(\frac{H}{3A}+\frac{2}{\varepsilon D}\right) \qquad [a=c]\Rightarrow\frac{H}{3A}+\frac{1}{\varepsilon D}=-\frac{\varepsilon DB}{3A} \qquad 21.79$$

$$Q^2=1 \qquad H=\frac{E_R}{m_oc^2}=\frac{-m_oc^2}{m_oc^2}=-1 \qquad \varepsilon DB=\frac{\varepsilon DGM_o}{L'^2}=\frac{\varepsilon DGM_o}{\varepsilon DGM_o}=1$$

$$[a=b]\Rightarrow\frac{H}{3A}+\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{1}{1}\left(\frac{H}{3A}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon D}=zero \qquad [a=c]\Rightarrow\frac{-1}{3A}+\frac{1}{\varepsilon D}=-\frac{1}{3A}\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon D}=zero$$

$$[b=c]\Rightarrow\frac{1}{Q^2}\left(\frac{H}{3A}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)=-\frac{\varepsilon DB}{3A} \qquad 21.80$$

$$\varepsilon DB=\frac{\varepsilon DGM_o}{L'^2}=\frac{\varepsilon DGM_o}{\varepsilon DGM_o}=1 \qquad 21.81$$

$$[b=c]\Rightarrow\frac{1}{Q^2}\left(\frac{H}{3A}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)=-\frac{1}{3A} \qquad Q^2=-H-\frac{6A}{\varepsilon D} \qquad 21.82$$

$Q=Q(H)$ O avanço é função da energia negativa que governa o movimento.

$$H=\frac{E_R}{m_oc^2}=\frac{-m_oc^2}{m_oc^2}=-1 \qquad Q^2=-(-1)-\frac{6A}{\varepsilon D}\Rightarrow Q^2=1-\frac{6A}{\varepsilon D}\ \text{Avanço} \qquad 21.83$$

$$[a=b]\Rightarrow\frac{-1}{3A}+\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{1}{\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)}\left(\frac{-1}{3A}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon D}=zero \qquad 21.84$$

$$H=\frac{E_R}{m_oc^2} \qquad A=\frac{GM_o}{c^2} \qquad B=\frac{GM_o}{L'^2}$$

$$\frac{-Q^2H}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}=zero \qquad \frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3A}=zero \qquad 21.78$$

$$3A\varepsilon D\left(\frac{-Q^2H}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)=zero \qquad 3A\varepsilon^2D^2\left(\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3A}\right)=zero$$

$$-Q^2H\varepsilon D+H\varepsilon D-Q^23A+6A=zero \qquad H\varepsilon D+3A+\varepsilon D(\varepsilon DB)=zero \qquad 21.85$$

$$\varepsilon DB=\frac{\varepsilon DGM_o}{L'^2}=\frac{\varepsilon DGM_o}{\varepsilon DGM_o}=1 \qquad H\varepsilon D=-3A-\varepsilon D \qquad 21.86$$

$$-Q^2(-3A-\varepsilon D)-3A-\varepsilon D-Q^23A+6A=zero \qquad 21.87$$

$$Q^23A+Q^2\varepsilon D-\varepsilon D-Q^23A+3A=zero$$

$$Q^2\varepsilon D-\varepsilon D+3A=zero \qquad Q^2=1-\frac{3A}{\varepsilon D} \qquad 21.88$$

Este avanço não é governado pela energia negativa.

$$-Q^2H\varepsilon D+H\varepsilon D-Q^23A+6A=zero \qquad 21.85$$

$$-Q^2(-3A-\varepsilon D)+H\varepsilon D-Q^23A+6A=zero \qquad 21.89$$

$$Q^23A+Q^2\varepsilon D+H\varepsilon D-Q^23A+6A=zero$$

$$Q^2\varepsilon D+H\varepsilon D+6A=zero \qquad Q^2=-H-\frac{6A}{\varepsilon D} \qquad 21.90$$

$$\left(\frac{-Q^2H}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3A}=zero \qquad 21.77$$

$$3A\varepsilon^2D^2\left[\left(\frac{-Q^2H}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3A}\right]=zero$$

$$\varepsilon D\left(\frac{-Q^2H3A\varepsilon D}{3A}+\frac{H3A\varepsilon D}{3A}-\frac{Q^23A\varepsilon D}{\varepsilon D}+\frac{2\,.\,3A\varepsilon D}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H3A\varepsilon^2D^2}{3A\varepsilon D}+\frac{3A\varepsilon^2D^2}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B3A\varepsilon^2D^2}{3A}=zero$$

$$\varepsilon D(-Q^2H\varepsilon D+H\varepsilon D-Q^23A+6A)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H\varepsilon D+3A+\varepsilon D(\varepsilon DB)=zero$$

$$\varepsilon DB=\frac{\varepsilon DGM_o}{L'^2}=\frac{\varepsilon DGM_o}{\varepsilon DGM_o}=1 \qquad H=\frac{E_R}{m_oc^2}=\frac{-m_oc^2}{m_oc^2}=-1$$

$$\varepsilon D(-Q^2H\varepsilon D+H\varepsilon D-Q^23A+6A)\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\varepsilon D+3A+\varepsilon D=zero$$

$$(-Q^2H\varepsilon D+H\varepsilon D-Q^23A+6A)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero \qquad 21.91$$

$$Q^2=1-\frac{3A}{\varepsilon D}$$

$$\left[-\left(1-\frac{3A}{\varepsilon D}\right)H\varepsilon D+H\varepsilon D-\left(1-\frac{3A}{\varepsilon D}\right)3A+6A\right]\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero$$

$$\left(-H\varepsilon D+H\varepsilon D\frac{3A}{\varepsilon D}+H\varepsilon D-3A+3A\frac{3A}{\varepsilon D}+6A\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero$$

$$\left(-H\varepsilon D+H3A+H\varepsilon D-3A+\frac{9A^2}{\varepsilon D}+6A\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero$$

$$\left(H3A+\frac{9A^2}{\varepsilon D}+3A\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero$$

$$H=\frac{E_R}{m_o c^2}=\frac{-m_o c^2}{m_o c^2}=-1$$

$$\left(-3A+\frac{9A^2}{\varepsilon D}+3A\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero$$

$$\frac{9A^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero \qquad \frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{3A}=zero$$ 21.92

$$\left(-Q^2H\varepsilon D+H\varepsilon D-Q^2 3A+6A\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero$$ 21.91

$$Q^2=1-\frac{6A}{\varepsilon D}$$

$$\left[-\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)H\varepsilon D+H\varepsilon D-\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)3A+6A\right]\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero$$

$$\left(-H\varepsilon D+H\varepsilon D\frac{6A}{\varepsilon D}+H\varepsilon D-3A+3A\frac{6A}{\varepsilon D}+6A\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero$$

$$\left(-H\varepsilon D+H6A+H\varepsilon D-3A+\frac{18A^2}{\varepsilon D}+6A\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero$$

$$\left(H6A+\frac{18A^2}{\varepsilon D}+3A\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero$$

$$H=\frac{E_R}{m_o c^2}=\frac{-m_o c^2}{m_o c^2}=-1$$

$$\left(-6A+\frac{18A^2}{\varepsilon D}+3A\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero$$

$$\frac{1}{3A}\left[\left(-3A+\frac{18A^2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}\right]=zero$$

$$\left(-1+\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=zero$$

$$-\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=zero \qquad -Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=zero \qquad 21.93$$

$$\left(-Q^2 H\varepsilon D+H\varepsilon D-Q^2 3A+6A\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero \qquad 21.91$$

$$Q^2=1 \qquad H=\frac{E_R}{m_o c^2}=\frac{-m_o c^2}{m_o c^2}=-1$$

$$(\varepsilon D-\varepsilon D-3A+6A)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero$$

$$(3A)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3A}{\varepsilon D}=zero \qquad \frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=zero \qquad 21.94$$

$$Q^2=1-\frac{6A}{\varepsilon D} \qquad Q^2=1 \qquad Q^2=1-\frac{3A}{\varepsilon D}$$

$$\left|-Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}\right| << \left|\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}\right| <<<<<< \left|\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{3A}\right| \qquad 21.95$$

Energia Newtoniana (E_N)

$$E_N=\frac{m_o u^2}{2}-\frac{k}{r}$$

$$u^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}$$

$$E_N=\frac{m_o}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}\right]-\frac{k}{r}$$

$$\frac{2E_N}{m_o}=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}-\frac{2k}{m_o}\frac{1}{r}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}-\frac{2k}{m_o}\frac{1}{r}-\frac{2E_N}{m_o}=zero$$

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{L}{r^2} \qquad \frac{dr}{dt}=-L\frac{dw}{d\phi} \qquad \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{-L^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2} \qquad \frac{d^2\phi}{dt^2}=\frac{2L^2}{r^3}\frac{dw}{d\phi}$$

$$\left(-L\frac{dw}{d\phi}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}-\frac{2k}{m_o}\frac{1}{r}-\frac{2E_N}{m_o}=zero$$

$$\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2+\frac{1}{r^2}-\frac{2k}{m_o L^2}\frac{1}{r}-\frac{2E_N}{m_o L^2}=zero$$

$$\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2+\frac{1}{r^2}-\frac{2k}{m_o L^2}\frac{1}{r}-\frac{2E_N}{m_o L^2}=zero$$

$$\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2+w^2-\frac{2k}{m_oL^2}w-\frac{2E_N}{m_oL^2}=zero$$

$$x=\frac{2k}{m_oL^2} \qquad y=\frac{2E_N}{m_oL^2}$$

$$\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2+w^2-xw-y=zero$$

$$w=\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)] \qquad \frac{dw}{d\phi}=\frac{-Qsen(\phi Q)}{D} \qquad \frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}$$

$$\left[\frac{-Qsen(\phi Q)}{D}\right]^2+\left\{\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]\right\}^2-x\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]-y=zero$$

$$\frac{Q^2}{D^2}\left[1-\cos^2(\phi Q)\right]+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\left[1+2\varepsilon\cos(\phi Q)+\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)\right]-x\frac{1}{\varepsilon D}-x\frac{1}{\varepsilon D}\varepsilon\cos(\phi Q)-y=zero$$

$$\frac{Q^2}{D^2}-\frac{Q^2}{D^2}\cos^2(\phi Q)+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}2\varepsilon\cos(\phi Q)+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)-\frac{x}{\varepsilon D}-x\frac{\cos(\phi Q)}{D}-y=zero$$

$$\frac{Q^2}{D^2}-Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-x\frac{\cos(\phi Q)}{D}-y=zero$$

$$\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}-Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\frac{2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-x\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{Q^2}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{2}{\varepsilon D}-x\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{Q^2}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$Q^2\approx 1 \qquad \left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}=zero$$

$$\left(\frac{2}{\varepsilon D}-x\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$\left(\frac{2}{\varepsilon D}-x\right)=zero \qquad \frac{1}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$x=\frac{2k}{m_oL^2} \qquad y=\frac{2E_N}{m_oL^2}$$

$$\frac{2}{\varepsilon D}-x=zero\Rightarrow x=\frac{2}{\varepsilon D}=\frac{2k}{m_oL^2}\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon D}=\frac{GM_om_o}{m_oL^2}\Rightarrow L^2=\varepsilon DGM_o$$

$$\frac{\varepsilon^2D^2}{D^2}+\frac{\varepsilon^2D^2}{\varepsilon^2D^2}-\frac{\varepsilon^2D^2x}{\varepsilon D}-\varepsilon^2D^2y=zero$$

$$\varepsilon^2+1-\varepsilon Dx-\varepsilon^2D^2y=zero$$

$$\varepsilon Dx = \varepsilon D\frac{2}{\varepsilon D} \Rightarrow \varepsilon Dx = 2$$

$$\varepsilon^2 D^2 y = \varepsilon^2 D^2 \frac{2E_N}{m_o L^2} = \varepsilon^2 D^2 \frac{2E_N}{m_o \varepsilon DGM_o} = \frac{2\varepsilon DE_N}{k}$$

$$\varepsilon^2 + 1 - 2 - \frac{2\varepsilon DE_N}{k} = zero$$

$$E_N = \frac{k}{2\varepsilon D}\left(\varepsilon^2 - 1\right)$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\varepsilon D}\left(1 - \varepsilon^2\right)$$

$$E_N = \frac{-k}{2a}$$

§22 Deformação espacial

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t > t'$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L}{c}\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$t' = \frac{2L'}{c}$$

$$t = \frac{2L}{c}\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{\frac{2L'}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow L = L'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$L' > L$$

Que é a deformação espacial.

Sendo o comprimento L’ em repouso no referencial de O’ maior que o comprimento L que está em movimento com velocidade v em relação ao referencial de O.

Agora calculemos para o Observador O’ a distancia $d' = vt'$ entre $O \leftrightarrow O'$:

$$d' = vt' = v\frac{2L'}{c}$$

Desta obtemos a velocidade v: $d' = v\frac{2L'}{c} \Rightarrow v = \frac{cd'}{2L'}$.

Agora calculemos para o Observador O a distancia $d = vt$ entre $O \leftrightarrow O'$:

$$d = vt = v\left(t_1 + t_2\right) = v\frac{2L}{c}\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Desta obtemos a velocidade v: $d = v\frac{2L}{c}\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \Rightarrow v = \frac{cd}{2L}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$.

A velocidade v é a mesma para ambos os observadores por isso temos:

$$v = \frac{cd'}{2L'} = \frac{cd}{2L}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Onde aplicando a relação $L = L'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ obtemos:

$$\frac{cd'}{2L'} = \frac{cd}{2L'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Rightarrow d' = d\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$d > d'$.

Onde as distâncias d e d' variam de forma inversa as distancias L e L'.

No geral teremos de 14.2 e 14.4:

$$d' = \frac{d\left(1 - \frac{vux}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{ou} \qquad d = \frac{d'\left(1 + \frac{vu'x'}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$u'x' = zero \qquad d = \frac{d'\left[1 + \frac{v(0)}{c^2}\right]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad d = \frac{d'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$u'x' = c \qquad d = \frac{d'\left(1 + \frac{vc}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad d = d'\sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

$$u'x' = -v \qquad d = \frac{d'\left[1 + \frac{v(-v)}{c^2}\right]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad d = d'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$ux = v \qquad d' = \frac{d\left[1 - \frac{v(v)}{c^2}\right]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad d' = d\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$ux = c \qquad d' = \frac{d\left(1 - \frac{vc}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad d' = d\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

$$ux = zero \qquad d' = \frac{d\left[1 - \frac{v(0)}{c^2}\right]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad d' = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

§23 Curvatura do Espaço e Tempo

As variáveis com linha $t',v',x',y',\vec{r}'$, etc... São as utilizadas no §21.

Geometria do espaço e tempo no plano $xy \rightarrow y \perp x$.

$$y=f(x)$$

$$x=ct' \qquad y=\int ds'=\int \sqrt{d\vec{r}'.d\vec{r}'}$$

$$\int ds'=f(ct')$$

$$dx=cdt' \qquad dy=ds'=\sqrt{d\vec{r}'.d\vec{r}'}$$

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}=ct'\hat{i}+\int ds'\hat{j} \qquad \vec{r}'=x'\hat{i}+y'\hat{j}$$

$$d\vec{r}=dx\hat{i}+dy\hat{j}=cdt'\hat{i}+ds'\hat{j} \qquad d\vec{r}'=dx'\hat{i}+dy'\hat{j}$$

$$dr=\frac{\vec{r}.d\vec{r}}{r}=\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt'}=\frac{dx}{dt'}\hat{i}+\frac{dy}{dt'}\hat{j}=\frac{cdt'}{dt'}\hat{i}+\frac{ds'}{dt'}\hat{j}=c\hat{i}+v'\hat{j} \qquad \vec{v}'=\frac{d\vec{r}'}{dt'}=\frac{dx'}{dt'}\hat{i}+\frac{dy'}{dt'}\hat{j}$$

$$\frac{dx}{dt'}=c \qquad \frac{dy}{dt'}=\frac{ds'}{dt'}=v' \qquad c=v\cos\varphi \qquad v'=v\,sen\varphi$$

$$tg\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt'}}{\frac{dx}{dt'}}=\frac{\frac{ds'}{dt'}}{c}=\frac{1}{c}\frac{ds'}{dt'} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{c}\frac{ds'}{dt'}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{d^2s'}{dt'^2}$$

$$\vec{v}=\vec{c}+\vec{v}' \qquad \vec{c}=c\hat{i} \qquad \vec{v}'=v'\hat{j}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt'}=\frac{d\vec{c}}{dt'}+\frac{d\vec{v}'}{dt'} \qquad \frac{d\vec{c}}{dt'}=zero \qquad \frac{d\vec{v}}{dt'}=\frac{d\vec{v}'}{dt'}\rightarrow\vec{a}=\vec{a}'$$

$$ds^2=d\vec{r}.d\vec{r}=(dx\hat{i}+dy\hat{j})(dx\hat{i}+dy\hat{j})=(cdt'\hat{i}+ds'\hat{j})(cdt'\hat{i}+ds'\hat{j})=dx^2+dy^2=c^2dt'^2+ds'^2$$

$$ds=\sqrt{c^2dt'^2+ds'^2} \qquad ds'=\sqrt{ds^2-c^2dt'^2}$$

$$v=\frac{ds}{dt'}=\sqrt{c^2+\left(\frac{ds'}{dt'}\right)^2}=\sqrt{c^2+v'^2}>c \qquad v'=\frac{ds'}{dt'}=\sqrt{\left(\frac{ds}{dt'}\right)^2-c^2}=\sqrt{v^2-c^2}$$

$$K=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|\rightarrow\varphi\equiv\angle$$ curvatura teórica

$$tg\varphi=\frac{dy}{dx} \qquad \varphi=arctg\frac{dy}{dx} \qquad \frac{d\varphi}{dx}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{\frac{1}{c^2}\frac{d^2s'}{dt'^2}}{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt'}\right)^2}$$

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt'}\right)^2}$$

$$\mathrm{K}=\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}=\frac{\frac{\frac{1}{c^2}\frac{d^2s'}{dt'^2}}{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt'}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt'}\right)^2}}=\frac{\frac{1}{c^2}\frac{d^2s'}{dt'^2}}{\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ds'}{dt'}\mathrm{K}=\frac{ds'}{dt'}\frac{d\varphi}{ds}=v'\mathrm{K}=v'\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\frac{1}{c^2}\frac{ds'}{dt'}\frac{d^2s'}{dt'^2}}{\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{c^2}\vec{v}'\frac{d\vec{v}'}{dt'}}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{v}'\vec{\mathrm{K}}=\vec{v}'\frac{d\vec{\varphi}}{ds}=\frac{\frac{1}{c^2}\vec{v}'\frac{d\vec{v}'}{dt'}}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \vec{\mathrm{K}}=\frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{ds}}=\frac{\frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}'}{\mathrm{dt}'}}{\left(1+\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dE_k=\frac{m_o v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_o v' dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{k}{r^2}dr=\frac{k}{r^2}\hat{r}d\vec{r}' \qquad 21.56$$

$$\frac{dE_k}{dt'}=\vec{F}'.\vec{v}'=\frac{m_o\frac{c^2}{c^2}\vec{v}'\frac{d\vec{v}'}{dt'}}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k}{r^2}\hat{r}\frac{d\vec{r}'}{dt'}=\frac{k}{r^2}\hat{r}\vec{v}'$$

$$\frac{dE_k}{dt'}=\vec{F}'.\vec{v}'=m_o c^2\vec{v}'\frac{d\vec{\varphi}}{ds}=\frac{k}{r^2}\hat{r}\vec{v}'$$

$$\vec{F}'=m_o c^2\frac{d\vec{\varphi}}{ds}=\frac{k}{r^2}\hat{r} \qquad \vec{\mathrm{K}}=\frac{d\vec{\varphi}}{ds}=\frac{k}{m_o c^2}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

§ 24 Princípio Variacional

$$E_k=\frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{k}{r}+\text{constante} \qquad 21.21$$

$$E_k=\frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{k}{r}+\text{constante}$$

$$\frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\left(-m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{k}{r}\right)=m_oc^2 \qquad p=\frac{d}{dv}\left(-m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)=\frac{m_ov}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$L=-m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{k}{r}$ Lagrangeana.

$\frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-L=m_oc^2$ Que é a energia inercial da partícula de massa m_o.

$$pv-L=m_oc^2 \qquad L=pv-m_oc^2=-m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{k}{r}$$

Princípio Variacional

$\text{Ação}=S=\int_{t_1}^{t_2}L[x(t),\dot{x}(t),t]dt \qquad \dot{x}=\frac{dx}{dt}=ux$ Esta é a componente da velocidade no eixo x.

$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(x,\dot{x},t)dt=\text{zero}$ Variação nula da ação ao longo do eixo x.

Construindo a variável $x'=x+\varepsilon\eta$ no intervalo $t_1\le t\le t_2$ nesta vemos que quando $\varepsilon\to\text{zero}\Rightarrow x'=x$ e quando $\varepsilon\neq\text{zero}$ teremos as condições:

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\text{zero} \qquad \eta=\eta(t) \qquad \eta(t_1)=\text{zero} \qquad \eta(t_2)=\text{zero} \qquad \frac{d\eta}{d\varepsilon}=\text{zero} \qquad \dot{\eta}=\frac{d\eta}{dt}$$

$$x'=x+\varepsilon\eta \qquad \dot{x}'=\dot{x}+\varepsilon\dot{\eta} \qquad \frac{dx'}{d\varepsilon}=\eta \qquad \frac{d\dot{x}'}{d\varepsilon}=\dot{\eta} \qquad \frac{dx}{d\varepsilon}=\text{zero} \qquad \frac{d\dot{x}}{d\varepsilon}=\text{zero}$$

Temos então uma nova função $I(\varepsilon)=\int_{t_1}^{t_2}G(x+\varepsilon\eta,\dot{x}+\varepsilon\dot{\eta},t)dt=\int_{t_1}^{t_2}F(x',\dot{x}',t)dt$ onde quando

$$\varepsilon=\text{zero}\to x'=x\to\dot{x}'=\dot{x}\to F=L\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}F(x',\dot{x}',t)dt=\int_{t_1}^{t_2}L(x,\dot{x},t)dt$$

$$\varepsilon \neq \text{zero} \rightarrow x' \neq x \rightarrow \dot{x}' \neq \dot{x} \rightarrow F \neq L \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F(x',\dot{x}',t)dt \neq \int_{t_1}^{t_2} L(x,\dot{x},t)dt$$

Assim $I(\varepsilon)=\int_{t_1}^{t_2} F[x'(\varepsilon),\dot{x}'(\varepsilon),t]dt$ que derivada fornece:

$$\frac{\delta I(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F(x',\dot{x}',t)}{\partial x'}\frac{dx'}{d\varepsilon}dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F(x',\dot{x}',t)}{\partial \dot{x}'}\frac{d\dot{x}'}{d\varepsilon}dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial x'}\eta dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\dot{\eta}dt=\text{zero}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\eta\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\right)\eta+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\frac{d\eta}{dt}\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\dot{\eta}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\eta\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\right)\eta$$

$$\frac{\delta I(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial x'}\eta dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\dot{\eta}dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial x'}\eta dt+\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\eta\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\right)\eta\right]dt=\text{zero}$$

$$\frac{\delta I(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial x'}\eta dt+\int_{t_1}^{t_2}d\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\eta\right)-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\right)\eta dt=\text{zero}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}d\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\eta\right)=\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\eta\Big|_{t_1}^{t_2}=\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\eta(t_2)-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\eta(t_1)=\text{zero}$$

$$\frac{\delta I(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial x'}\eta dt-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\right)\eta dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial x'}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\right)\right]\eta dt=\text{zero}$$

$$\frac{\delta I(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial x'}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\right)\right]\eta dt=\text{zero}\Rightarrow\eta\neq\text{zero}\rightarrow\frac{\partial F}{\partial x'}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'}\right)=\text{zero}$$

$$\varepsilon=\text{zero}\rightarrow x'=x\rightarrow\dot{x}'=\dot{x}\rightarrow F=L\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\text{zero}$$

$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$ Esta é a componente do eixo x $\qquad L=-m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{k}{r}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{k}{r}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(-m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{k}{r}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)=\text{zero}\qquad\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{k}{r}\right)=\text{zero}\qquad v=\sqrt{\frac{dx}{dt}^2+\frac{dy}{dt}^2+\frac{dz}{dt}^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{r}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(-m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\right]$ Esta é a componente do eixo x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{r}\right)=k\frac{\partial}{\partial x}\left(r^{-1}\right)=k(-1)r^{-1-1}\frac{\partial r}{\partial x}=-k\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}=-k\frac{x}{r^3} \qquad r^2=x^2+y^2+z^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(-m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)=-m_o c^2\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(-\frac{2v}{c^2}\frac{dv}{d\dot{x}}\right)=\frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{d\dot{x}}\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(-m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)=\frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)^{\frac{1}{2}-1}2\dot{x}\right]=\frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right)=\frac{m_o\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_o\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\left[\frac{d\dot{x}}{dt}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\right]=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\left[\frac{d\dot{x}}{dt}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-\dot{x}\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(-\frac{2v}{c^2}\frac{dv}{dt}\right)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_o\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\left[\frac{d\dot{x}}{dt}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}\right)\right]=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\left[\frac{\frac{d\dot{x}}{dt}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}\right)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_o\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\left[\frac{\frac{d\dot{x}}{dt}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}\right)\right]=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d\dot{x}}{dt}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{x}}{c^2}\right]$$

$$-k\frac{x}{r^3}\hat{i}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{x}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{x}}{c^2}\right]\hat{i}$$ Eixo x

$$-k\frac{y}{r^3}\hat{j}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{y}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{y}}{c^2}\right]\hat{j}$$ Eixo y

$$-k\frac{z}{r^3}\hat{k}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{z}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{z}}{c^2}\right]\hat{k}$$ Eixo z

$$-k\frac{x}{r^3}\hat{i}-k\frac{y}{r^3}\hat{j}-k\frac{z}{r^3}\hat{k}=\frac{-k}{r^3}\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)=\frac{-k}{r^3}\vec{r}=\frac{-k}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{x}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{x}}{c^2}\right]\hat{i}+\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{y}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{y}}{c^2}\right]\hat{j}+\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{z}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{z}}{c^2}\right]\hat{k}=\frac{-k}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{x}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{x}}{c^2}\right]\hat{i}+\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{y}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{y}}{c^2}\right]\hat{j}+\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{z}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{z}}{c^2}\right]\hat{k}\right\}=\frac{-k}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{x}\hat{i}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{x}}{c^2}\hat{i}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{y}\hat{j}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{y}}{c^2}\hat{j}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{z}\hat{k}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{x}}{c^2}\hat{k}\right]=\frac{-k}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k}\right)+\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}\left(\dot{x}\hat{i}++\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}\right)\right]=\frac{-k}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{a}=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k}=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}\right)=\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{v}=\dot{x}\hat{i}++\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{F}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}}{dt}+v\frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right]=\frac{-k}{r^2}\hat{r} \qquad = 21.16$$

$$\vec{F}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}}{dt}+v\frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right]=\frac{-k}{r^2}\hat{r} \qquad = 21.19$$

§ 24 Princípio Variacional Continuação

$$E_k = m_oc^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{k}{r} + \text{constante} \qquad 21.21$$

$$E_k = m_oc^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = \frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{k}{r} + \text{constante}$$

$$E_k - \frac{k}{r} = m_oc^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - \frac{k}{r} = \frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{k}{r} = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{k}{r} = \frac{k}{r} - \frac{k}{r} + \text{constante}$$

$$E_k - \frac{k}{r} = m_oc^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - \frac{k}{r} = \frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \left(-m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{k}{r}\right) = m_oc^2 = \text{constante}$$

$$T' = m_oc^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} \qquad T = -m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad E_p = -\frac{k}{r} \qquad pv = \frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$pv=\frac{m_ov}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v=v'\frac{m_ov'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=v'p'. \qquad p=p'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} \qquad p'=p\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$E_R = E_k + E_p = T' + E_p = pv - \left(T - E_p\right)$$

$$E_k = T' \qquad E_k = pv - T \qquad T' = pv - T \qquad T = p'v' - T'$$

$$L' = T' + E_p \qquad L = T - E_p$$

$$E_R = E_k + E_p = L' = pv - L$$

$$L' = pv - L \qquad L = p'v' - L' \qquad L + L' = pv = p'v'$$

$$p' = \frac{dT'}{dv'} = \frac{d}{dv'}\left(m_o c^2 \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}\right) = \frac{m_o v'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = m_o v \qquad p = \frac{dT}{dv} = \frac{d}{dv}\left(-m_o c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{m_o v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_o v'$$

$$d\vec{r}' = dx'\hat{i} + dy'\hat{j} + dz'\hat{k} = -dx\hat{i} - dy\hat{j} - dz\hat{k} = -d\vec{r} \qquad 21.08$$

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{dx'}{dt'}\hat{i} + \frac{dy'}{dt'}\hat{j} + \frac{dz'}{dt'}\hat{k} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{-\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\dot{x}' = v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx}{dt} = \frac{-v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p'_x = \frac{dT'}{d\dot{x}'} = \frac{d}{d\dot{x}'}\left(m_o c^2 \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}\right) = \frac{m_o \dot{x}'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = -m_o \dot{x} \qquad p_x = \frac{dT}{d\dot{x}} = \frac{d}{d\dot{x}}\left(-m_o c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{m_o \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -m_o \dot{x}'$$

$$\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k} = -x\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{k} = -\vec{r} \qquad 21.07$$

$$x' = -x \qquad y' = -y \qquad z' = -z$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial y'}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial z'}{\partial z} = -1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \text{zero}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \text{zero} \qquad L = p'v' - L' \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = p_x = -m_o \dot{x}'$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x'}(p'v' - L') - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}\frac{d}{dt'}(-m_o \dot{x}') = \text{zero}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x'}(p'v' - L') + \frac{m_o}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}\frac{d\dot{x}'}{dt'} = -v'\frac{\partial p'}{\partial x'} - p'\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial L'}{\partial x'} + \frac{m_o}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}\frac{d\dot{x}'}{dt'} = \text{zero}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} = \text{zero} \qquad \frac{\partial v'}{\partial x'} = \text{zero} \qquad L' = m_o c^2 \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} - \frac{k}{r}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial x'} + \frac{m_o}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}\frac{d\dot{x}'}{dt'} = \text{zero} \qquad r^2 = \vec{r}'.\vec{r}' = (-\vec{r}).(-\vec{r}) = x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial L'}{\partial x'}=\frac{\partial}{\partial x'}\left(m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}-\frac{k}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x'}\left(-\frac{k}{r}\right)=-k\frac{\partial}{\partial x'}\left(r^{-1}\right)=-k(-1)r^{-1-1}\frac{\partial r}{\partial x'}=k\frac{1}{r^2}\frac{x'}{r}=k\frac{x'}{r^3}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial x'}+\frac{m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{d\dot{x}'}{dt'}=k\frac{x'}{r^3}+\frac{m_o\ddot{x}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\text{zero}$$

$$\frac{m_o\ddot{x}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=-k\frac{x'}{r^3} \qquad -k\frac{x'}{r^3}\hat{i}-k\frac{y'}{r^3}\hat{j}-k\frac{z'}{r^3}\hat{k}=\frac{-k}{r^3}\left(x'\hat{i}+y'\hat{j}+z'\hat{k}\right)=\frac{-k}{r^3}\vec{r}'=\frac{-k}{r^2}\hat{r}'$$

$$\frac{m_o\ddot{x}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\hat{i}+\frac{m_o\ddot{y}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\hat{j}+\frac{m_o\ddot{z}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\hat{k}=\frac{m_o\vec{a}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{-k}{r^2}\hat{r}'$$

$$\frac{m_o\vec{a}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{-k}{r^2}\hat{r}'=\frac{k}{r^2}\hat{r} \qquad -\hat{r}'=\hat{r} \qquad \frac{-m_o\vec{a}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{-k}{r^2}\hat{r} \qquad = 21.19$$

§25 Espiral logarítmica

$$H\frac{d^2w}{d\phi^2}+Hw+3A\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3Aw^2-B=\text{zero} \qquad r=e^{a\phi} \qquad 21.37$$

$$w=\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)] \qquad \frac{dw}{d\phi}=\frac{-Q\,\text{sen}(\phi Q)}{D} \qquad \frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D} \qquad 21.38$$

$$w=\frac{1}{r}=\frac{1}{e^{a\phi}}=e^{-a\phi} \qquad \frac{dw}{d\phi}=-ae^{-a\phi} \qquad \frac{d^2w}{d\phi^2}=a^2e^{-a\phi}$$

$$Ha^2e^{-a\phi}+He^{-a\phi}+3Aa^2e^{-a\phi}e^{-a\phi}+3A\left(e^{-a\phi}\right)^2-B=\text{zero}$$

$$Ha^2e^{-a\phi}+He^{-a\phi}+3Aa^2e^{-2a\phi}+3Ae^{-2a\phi}-B=\text{zero}$$

$$\left(1+a^2\right)He^{-a\phi}+\left(1+a^2\right)3Ae^{-2a\phi}-B=\text{zero}$$

$$\left(1+a^2\right)3Ae^{-2a\phi}+\left(1+a^2\right)He^{-a\phi}-B=\text{zero}$$

$$\left(1+a^2\right)3Aw^2+\left(1+a^2\right)Hw-B=\text{zero}$$

$$3Aw^2+Hw-\frac{B}{\left(1+a^2\right)}=\text{zero}$$

$$w=e^{-a\phi}=\frac{1}{r}=\frac{-H\pm\sqrt{H^2+4.3A\frac{B}{\left(1+a^2\right)}}}{2.3A}=\frac{-H}{6A}\pm\frac{1}{6A}\sqrt{H^2+\frac{12AB}{\left(1+a^2\right)}}$$

$$3A\left[\frac{-H}{6A}\pm\frac{1}{6A}\sqrt{H^2+\frac{12AB}{\left(1+a^2\right)}}\right]^2+H\left[\frac{-H}{6A}\pm\frac{1}{6A}\sqrt{H^2+\frac{12AB}{\left(1+a^2\right)}}\right]-\frac{B}{\left(1+a^2\right)}=\text{zero}$$

$$3A\left[\left(\frac{-H}{6A}\right)^2 \pm 2\left(\frac{-H}{6A}\right)\frac{1}{6A}\sqrt{H^2+\frac{12AB}{(1+a^2)}}+\left(\frac{1}{6A}\sqrt{H^2+\frac{12AB}{(1+a^2)}}\right)^2\right]-$$

$$\frac{-H^2}{6A}\pm\frac{H}{6A}\sqrt{H^2+\frac{12AB}{(1+a^2)}}-\frac{B}{(1+a^2)}=\text{zero}$$

$$3A\left[\left(\frac{-H}{6A}\right)^2 \pm 2\left(\frac{-H}{6A}\right)\frac{1}{6A}\sqrt{H^2+\frac{12AB}{(1+a^2)}}+\frac{1}{36A^2}\left(H^2+\frac{12AB}{(1+a^2)}\right)\right]-$$

$$\frac{-H^2}{6A}\pm\frac{H}{6A}\sqrt{H^2+\frac{12AB}{(1+a^2)}}-\frac{B}{(1+a^2)}=\text{zero}$$

$$3A\left[\frac{H^2}{36A^2}\pm\frac{-H}{18A^2}\sqrt{H^2+\frac{12AB}{(1+a^2)}}+\frac{1}{36A^2}\left(H^2+\frac{12AB}{(1+a^2)}\right)\right]-$$

$$\frac{-H^2}{6A}\pm\frac{H}{6A}\sqrt{H^2+\frac{12AB}{(1+a^2)}}-\frac{B}{(1+a^2)}=\text{zero}$$

$$\frac{H^2}{12A}\pm\frac{-H}{6A}\sqrt{H^2+\frac{12AB}{(1+a^2)}}+\frac{1}{12A}\left(H^2+\frac{12AB}{(1+a^2)}\right)-$$

$$\frac{-H^2}{6A}\pm\frac{H}{6A}\sqrt{H^2+\frac{12AB}{(1+a^2)}}-\frac{B}{(1+a^2)}=\text{zero}$$

$$\frac{H^2}{12A}+\frac{1}{12A}\left(H^2+\frac{12AB}{(1+a^2)}\right)-\frac{H^2}{6A}-\frac{B}{(1+a^2)}=\text{zero}$$

$$\frac{H^2}{12A}+\frac{H^2}{12A}+\frac{B}{(1+a^2)}-\frac{H^2}{6A}-\frac{B}{(1+a^2)}=\text{zero}$$

§25 Espiral logarítmica Continuação

$$-\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{GM_o}{L'^2} \qquad 21.71$$

$$\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{-GM_o}{L'^2}$$

$$\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=-B \qquad H=\frac{E_R}{m_oc^2} \qquad A=\frac{GM_o}{c^2} \qquad B=\frac{GM_o}{L'^2}$$

$$\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)+B=\text{zero}$$

$$\left(H^3+3H^2A\frac{1}{r}+3HA^2\frac{1}{r^2}+A^3\frac{1}{r^3}\right)\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)+B=\text{zero}$$

$$H^3+3H^2A\frac{1}{r}+3HA^2\frac{1}{r^2}+A^3\frac{1}{r^3}\cong H^3+3H^2A\frac{1}{r} \qquad 3HA^2\frac{1}{r^2}+A^3\frac{1}{r^3}\cong\text{zero}$$

$$\left(H^3+3AH^2\frac{1}{r}\right)\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)+B=zero$$

$$\left(H^3+3AH^2w\right)\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+w\right)+B=zero$$

$$H^3\frac{d^2w}{d\phi^2}+H^3w+3AH^2\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3AH^2w^2+B=zero$$

$$w=\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)] \qquad \frac{dw}{d\phi}=\frac{-Qsen(\phi Q)}{D} \qquad \frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D} \qquad 21.38$$

$$H^3\left[\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\right]+H^3\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]+3AH^2\left[\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\right]\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]+$$
$$+3AH^2\left\{\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]\right\}^2+B=zero$$

$$-H^3Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H^3\frac{1}{\varepsilon D}+H^3\frac{1}{\varepsilon D}\varepsilon\cos(\phi Q)+3AH^2\left[\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\right]\frac{1}{\varepsilon D}+3AH^2\left[\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\right]\frac{1}{\varepsilon D}\varepsilon\cos(\phi Q)+$$
$$+3AH^2\left\{\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\left[1+2\varepsilon\cos(\phi Q)+\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)\right]\right\}+B=zero$$

$$-H^3Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H^3}{\varepsilon D}+H^3\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-3AH^2Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}\left[1+2\varepsilon\cos(\phi Q)+\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)\right]+B=zero$$

$$-H^3Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H^3}{\varepsilon D}+H^3\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-3AH^2Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}2\varepsilon\cos(\phi Q)+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)+B=zero$$

$$-H^3Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H^3}{\varepsilon D}+H^3\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-3AH^2Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}+\frac{6AH^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+3AH^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+B=zero$$

$$\frac{-H^3Q^2}{3AH^2}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H^3}{3AH^2\varepsilon D}+\frac{H^3}{3AH^2}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{3AH^2\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{3AH^2}\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3AH^2}{3AH^2\varepsilon^2D^2}+\frac{6AH^2}{3AH^2\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3AH^2}{3AH^2}\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\frac{B}{3AH^2}=zero$$

$$\frac{-HQ^2}{3A}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{H}{3A}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\frac{B}{3AH^2}=zero$$

$$\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}-Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}-\frac{HQ^2}{3A}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+$$

$$+\frac{2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{B}{3AH^2}=\text{zero}$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(-\frac{HQ^2}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{B}{3AH^2}=\text{zero}$$

$$H=\frac{E_R}{m_o c^2}=\frac{-m_o c^2}{m_o c^2}=-1 \qquad\qquad Q^2=1-\frac{6A}{\varepsilon D}$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(-\frac{(-1)Q^2}{3A}+\frac{(-1)}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{(-1)}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{B}{3A(-1)^2}=\text{zero}$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{1}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{B}{3A}=\text{zero}$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{1}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{\varepsilon DB}{3A\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\varepsilon DB=\frac{\varepsilon DGM_o}{L'^2}=1$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{1}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{1}{3A\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=\text{zero}$$

$$Q^2=1-\frac{6A}{\varepsilon D}$$

$$\left[1-\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\right]\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left[\frac{1}{3A}\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)-\frac{1}{3A}-\frac{1}{\varepsilon D}\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)+\frac{2}{\varepsilon D}\right]\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=\text{zero}$$

$$\left(1-1+\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{1}{3A}-\frac{1}{3A}\frac{6A}{\varepsilon D}-\frac{1}{3A}-\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon D}\frac{6A}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=\text{zero}$$

$$\left(\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(-\frac{2}{\varepsilon D}+\frac{6A}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{1}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=\text{zero}$$

$$(6A)\left(\frac{1}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(-\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{6A}{\varepsilon^2 D^2}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=\text{zero}$$

$$(6A)\left(\frac{1}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(-1+\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\left(\frac{1}{\varepsilon D}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon D}\right)=\text{zero}$$

$$(6A)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(-1+\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{-\left(-1+\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\pm\sqrt{\left(-1+\frac{6A}{\varepsilon D}\right)^2-4.6A.\frac{1}{\varepsilon D}}}{2.6A}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\pm\sqrt{(-1)^2+2(-1)\frac{6A}{\varepsilon D}+\left(\frac{6A}{\varepsilon D}\right)^2-\frac{24A}{\varepsilon D}}}{12A}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\pm\sqrt{1-\frac{12A}{\varepsilon D}+\left(\frac{6A}{\varepsilon D}\right)^2-\frac{24A}{\varepsilon D}}}{12A}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\pm\sqrt{1-\frac{36A}{\varepsilon D}+\frac{36A^2}{\varepsilon^2 D^2}}}{12A}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\pm\sqrt{1-\frac{36A}{\varepsilon D}+\frac{36A^2}{\varepsilon^2 D^2}}}{12A}$$

$$\sqrt{1-\frac{36A}{\varepsilon D}+\frac{36A^2}{\varepsilon^2 D^2}}\cong\sqrt{1-\frac{36A}{\varepsilon D}} \qquad \frac{36A^2}{\varepsilon^2 D^2}\cong\text{zero} \qquad A=\frac{GM_o}{c^2}$$

$$\frac{36A^2}{\varepsilon^2 D^2}=\frac{36}{\varepsilon^2 D^2}\left(\frac{GM_o}{c^2}\right)^2=\frac{36}{(55.442.955.600)^2}\left[\frac{6,67.10^{-11}1,989.10^{30}}{\left(2,99792458.10^8\right)^2}\right]^2=2,55.10^{-14}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\pm\sqrt{1-\frac{36A}{\varepsilon D}}}{12A}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\pm\sqrt{1-\frac{36A}{\varepsilon D}}}{12A}=\frac{1-\frac{6A}{\varepsilon D}\pm\left(1-\frac{1}{2}\frac{36A}{\varepsilon D}\right)}{12A}=\frac{1-\frac{6A}{\varepsilon D}\pm\left(1-\frac{18A}{\varepsilon D}\right)}{12A}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{1-\frac{6A}{\varepsilon D}-\left(1-\frac{18A}{\varepsilon D}\right)}{12A}=\frac{1-\frac{6A}{\varepsilon D}-1+\frac{18A}{\varepsilon D}}{12A}=\frac{\frac{12A}{\varepsilon D}}{12A}=\frac{1}{\varepsilon D}$$

$$-\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\text{zero}<r(\phi Q)<\infty\rightarrow M_o\neq\text{zero}\rightarrow Q=\sqrt{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\rightarrow-\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$(1-Q^2)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=zero$$

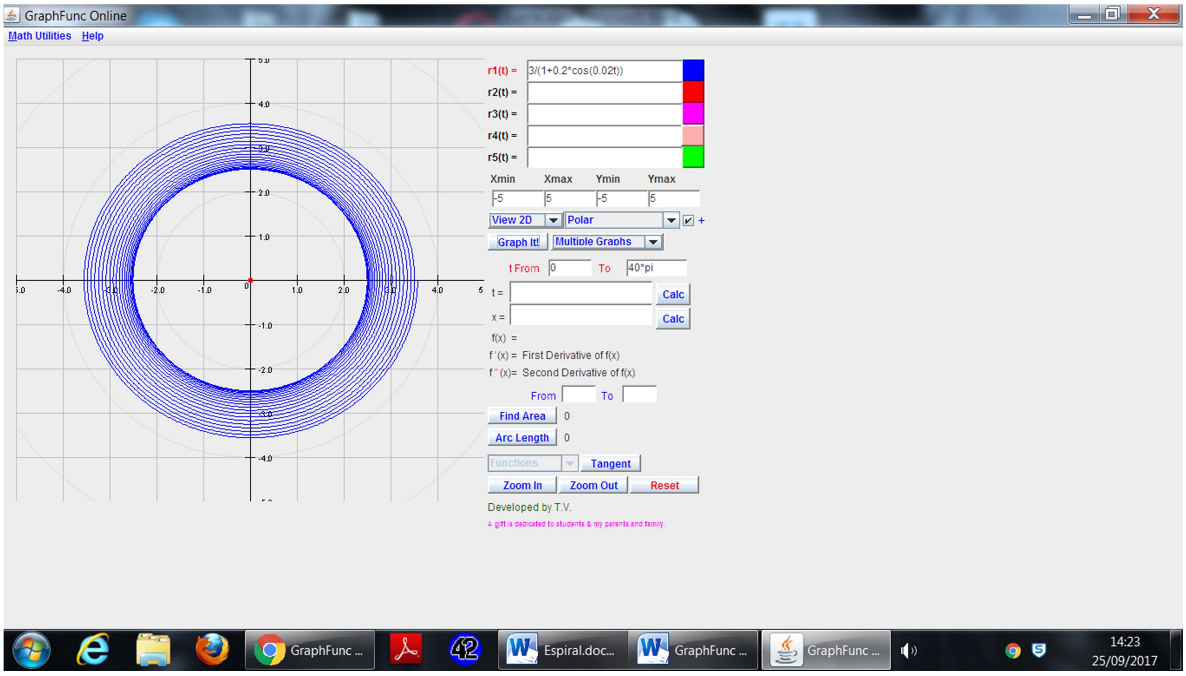
$$r=\infty\rightarrow M_o=zero\rightarrow Q=1 \qquad Q=\sqrt{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}=\sqrt{1-\frac{6}{\varepsilon D}\left(\frac{GM_o}{c^2}\right)}=\sqrt{1-\frac{6}{\varepsilon D}\left(\frac{G(zero)}{c^2}\right)}=1$$

$$(1-1)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{1}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=zero$$

$$\left(\frac{1}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=zero \qquad \frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=zero$$

$$r=\infty\rightarrow M_o=zero\rightarrow Q=1\rightarrow w=\frac{1}{r=\infty}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]=\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=zero$$

A presença de Q na fórmula $r=r(\phi Q)=\frac{\varepsilon D}{1+\varepsilon\cos(\phi Q)}$, permite que ela descreva também uma espiral.



§25 Espiral logarítmica Continuação II

$$(1-Q^2)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=zero$$

$$zero<r(\phi Q)<\infty\rightarrow M_o\neq zero\rightarrow Q=\frac{\sqrt{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}}{\sqrt{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}}$$

$$\left[1-\left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right)\right]\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left[\frac{1}{3A}\left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right)-\frac{1}{3A}-\frac{1}{\varepsilon D}\left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right)+\frac{2}{\varepsilon D}\right]\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=zero$$

$$\left[1-\frac{6A}{\varepsilon D}-\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)\right]\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left[\frac{1}{3A}\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)-\frac{1}{3A}\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)-\frac{1}{\varepsilon D}\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)+\frac{2}{\varepsilon D}\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\right]\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)=\text{zero}$$

$$\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}-1+\frac{12A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{1}{3A}-\frac{1}{3A}\frac{12A}{\varepsilon D}-\frac{1}{3A}+\frac{1}{3A}\frac{6A}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}-\frac{2}{\varepsilon D}\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\left(\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{-\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)^2-4\frac{6A}{\varepsilon D}\left(\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}\right)}}{2\frac{6A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{24A}{\varepsilon D}\left(\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}\right)}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{24A}{\varepsilon D}\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{24A}{\varepsilon D}\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\frac{1}{\varepsilon D}\sqrt{1-\frac{24A}{\varepsilon D}+\frac{24A}{\varepsilon D}\frac{6A}{\varepsilon D}}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\frac{1}{\varepsilon D}\sqrt{1-2\frac{12A}{\varepsilon D}+\frac{144A^2}{\varepsilon^2D^2}}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\frac{1}{\varepsilon D}\sqrt{\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)^2}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\frac{1}{\varepsilon D}\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\left(\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}\right)}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}-\left(\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}\right)}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{1}{\varepsilon D} \qquad -\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\text{zero}<r(\phi Q)<\infty\rightarrow M_o\neq\text{zero}\rightarrow Q=\frac{\sqrt{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}}{\sqrt{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}}\rightarrow-\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$Q^2=\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\approx1-\frac{6A}{\varepsilon D} \qquad Q^2=1-\frac{6A}{\varepsilon D} \qquad A=\frac{GM_o}{c^2}$$

$$\varepsilon D=a(1-\varepsilon^2)=57.909.227.000{,}00\left[1-(0{,}20563593)^2\right]=55.460.469.568{,}40$$

$$A=\frac{GM_o}{c^2}=\frac{6{,}6740831.10^{-11}.1{,}9891.10^{30}}{\left(2{,}99792458.10^{8}\right)^2}=1.477{,}089.535.42$$

$$Q=\sqrt{\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}}=0{,}999.999.920.1 \qquad Q=\sqrt{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}=0{,}999.999.920.1$$

$1{,}276.789.102.53^{-14}$

$$\phi.Q=1.296.000{,}00\Rightarrow\phi=\frac{1.296.000{,}00}{Q}$$

$Q<1$ Avanço $\qquad$ $Q>1$ Retrocesso

$$\Delta\phi=\left(\frac{1}{Q}-1\right)1.296.000{,}00$$

$\Delta\phi>\text{zero}$ Avanço $\qquad$ $\Delta\phi<\text{zero}$ Retrocesso

$$\Delta\phi=\left[\frac{1}{\left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right)^{\frac{1}{2}}}-1\right]1.296.000{,}00=0{,}103.549.893.544''$$

$$\Delta\phi=\left[\frac{1}{\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)^{\frac{1}{2}}}-1\right]1.296.000{,}00=0{,}103.549.876.997''$$

$$N=100.\frac{PT}{PM}=100\frac{365,256.363.004}{87,969}=415,210.316.139$$

$$\sum\Delta\phi=\Delta\phi.N=0,103.549.893.544\ \ x\ \ 415,210.316.139=42,994.984.034.7''$$

$$\sum\Delta\phi=\Delta\phi.N=0,103.549.876.997\ \ x\ \ 415,210.316.139=42,994.977.164.2''$$

Por definição $\varepsilon>zero$

$$zero<r(\phi Q)<\infty\rightarrow M_o\neq zero\rightarrow Q=\sqrt{\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}}\qquad r=\infty\rightarrow M_o=zero\rightarrow Q=1$$

$$-\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=zero\rightarrow\varepsilon=\frac{1}{\cos(\phi Q)}\qquad\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=zero\rightarrow\varepsilon=\frac{-1}{\cos(\phi Q)}$$

Se $Q=1$

$$\left[\varepsilon=\frac{1}{\cos(\phi-\pi)}\right]=\left[\varepsilon=\frac{-1}{\cos(\phi)}\right]$$

Energy Newtonian (E_N)

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(x-\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{Q^2}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$r=\infty\rightarrow Q=1\rightarrow w=\frac{1}{r=\infty}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]=\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=zero$$

$$\left(1-Q^2\right)\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)+\left(x-\frac{2}{\varepsilon D}\right)\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)+\frac{Q^2}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$\left(1-Q^2\right)\left(\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\right)-\frac{x}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon^2D^2}+\frac{Q^2}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{Q^2}{\varepsilon^2D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon^2D^2}+\frac{Q^2}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$-\frac{Q^2}{\varepsilon^2D^2}+\frac{Q^2}{D^2}+\frac{4}{\varepsilon^2D^2}-\frac{2x}{\varepsilon D}-y=zero\qquad Q^2=1$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{1}{D^2}+\frac{4}{\varepsilon^2D^2}-\frac{2x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$-\frac{\varepsilon^2D^2}{\varepsilon^2D^2}+\frac{\varepsilon^2D^2}{D^2}+\frac{4\varepsilon^2D^2}{\varepsilon^2D^2}-\frac{2x\varepsilon^2D^2}{\varepsilon D}-\varepsilon^2D^2y=zero$$

$$-1+\varepsilon^2+4-2x\varepsilon D-\varepsilon^2D^2y=zero$$

$$x=\frac{2}{\varepsilon D}\qquad y=\frac{2E_N}{m_oL^2}\qquad L^2=\varepsilon DGM\qquad\frac{1}{a}=\frac{-1}{\varepsilon D}\left(\varepsilon^2-1\right)$$

$-1+\varepsilon^2+4-2\frac{2}{\varepsilon D}\varepsilon D-\varepsilon^2 D^2 y=zero$ $\qquad$ $-1+\varepsilon^2-\varepsilon^2 D^2 y=zero$

$-1+\varepsilon^2-\varepsilon^2 D^2\frac{2E_N}{m_o L^2}=zero$ $\qquad$ $-1+\varepsilon^2-\varepsilon^2 D^2\frac{2E_N}{m_o\varepsilon DGM_o}=zero$

$-1+\varepsilon^2-\varepsilon D\frac{2E_N}{GM_o m_o}=zero$ $\qquad$ $\frac{1}{\varepsilon D}\left(\varepsilon^2-1\right)=\frac{2E_N}{k}$

$E_N=\frac{-k}{2a}$

§26 Avanço do Periélio de Mercúrio de 42,99"

Supondo $\quad ux=v$

(2.3) $u'x'=\frac{ux-v}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}}=\frac{v-v}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vv}{c^2}}}\Rightarrow u'x'=zero$

$ux=v$ $\qquad$ $u'x'=zero$ $\qquad$ 21.01

(1.17) $dt'=dt\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}=dt\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vv}{c^2}}\Rightarrow dt'=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

(1.22) $dt=dt'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}=dt'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'(0)}{c^2}}\Rightarrow dt=dt'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}$

$dt'=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ $\qquad$ $dt=dt'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}$ $\qquad$ 21.02

$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}=1$ $\qquad$ 21.03

$v=\frac{v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$ $\qquad$ $v'=\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\qquad$ 21.04

$dt>dt'$ $\qquad$ $v<v'$ $\qquad$ $vdt=v'dt'$ $\qquad$ 21.05

(1.33) $\vec{v}=\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}}=\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'(0)}{c^2}}}\Rightarrow\vec{v}=\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$

(1.34) $\vec{v}'=\frac{-\vec{v}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}}=\frac{-\vec{v}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vv}{c^2}}}\Rightarrow\vec{v}'=\frac{-\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$\vec{v}=\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$ $\qquad$ $-\vec{v}'=\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\qquad$ 21.06

$\vec{r}=r\hat{r}=-\vec{r}'$ $\qquad$ $\vec{r}'=-r\hat{r}=-\vec{r}$ $\qquad$ $|\vec{r}|=|\vec{r}'|=r$ $\qquad$ 21.07

$$d\vec{r}=dr\hat{r}+rd\hat{r}=-d\vec{r}' \qquad d\vec{r}'=-dr\hat{r}-rd\hat{r}=-d\vec{r} \tag{21.08}$$

$$\hat{r}d\vec{r}=dr\hat{r}\hat{r}+r\hat{r}d\hat{r}=dr \qquad \hat{r}d\vec{r}'=-dr\hat{r}\hat{r}-r\hat{r}d\hat{r}=-dr \tag{21.09}$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d(r\hat{r})}{dt}=\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi} \qquad v^2=\vec{v}\vec{v}=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \tag{21.10}$$

$$\vec{v}'=\frac{d\vec{r}'}{dt'}=\frac{d(-r\hat{r})}{dt'}=-\left(\frac{dr}{dt'}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt'}\hat{\phi}\right) \qquad v'^2=\vec{v}'\vec{v}'=\left(\frac{dr}{dt'}\right)^2+\left(r\frac{d\phi}{dt'}\right)^2 \tag{21.11}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2(r\hat{r})}{dt^2}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\hat{r}+\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\right)\hat{\phi} \tag{21.12}$$

$$\vec{a}'=\frac{d\vec{v}'}{dt'}=\frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2}=\frac{d^2(-r\hat{r})}{dt'^2}=-\left[\frac{d^2r}{dt'^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt'}\right)^2\right]\hat{r}-\left(2\frac{dr}{dt'}\frac{d\phi}{dt'}+r\frac{d^2\phi}{dt'^2}\right)\hat{\phi} \tag{21.13}$$

$$\vec{v}=\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} \tag{21.06}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\right)=\frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\left(\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\right)=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d}{dt'}\left(\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\right) \tag{21.50}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{-1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)}\left[\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}'}{dt'}-\vec{v}'\frac{d}{dt'}\left(\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\right)\right]$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{-1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)}\left[\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}'}{dt'}-\vec{v}'\frac{1}{2}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}=\frac{-1}{2}}\left(\frac{2v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}\right)\right]$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{-1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)}\left(\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}'}{dt'}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right)$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{-1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}'}{dt'}\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right)$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{-1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'}-v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right]$$

$$m\vec{a}=\frac{m_o\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{-m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'}-v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right]$$

$$\vec{F}=m\vec{a}=\frac{m_o\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad 21.51$$

$$\vec{F}'=\frac{-m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'}-v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right] \qquad 21.52$$

$$\vec{F}=m\vec{a}=\frac{m_o\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}'=\frac{-m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'}-v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right] \qquad 21.53$$

$$E_k=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int\vec{F}'\;.(-d\vec{r}')=\int\frac{-k}{r^2}\hat{r}(-d\vec{r}') \qquad 21.54$$

$$E_k=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int\vec{F}'\;.(-d\vec{r}')=\int\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r}=\int\frac{-m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'}-v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right](-d\vec{r}')=\int\frac{-k}{r^2}\hat{r}(-d\vec{r}') \qquad 21.55$$

$$E_k=\int\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}d\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt}=\int\frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)d\vec{v}'\frac{d\vec{r}'}{dt'}-v'dv'\frac{d\vec{r}'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right]=\int\frac{k}{r^2}\hat{r}d\vec{r}'$$

$$E_k=\int\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}d\vec{v}\vec{v}=\int\frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)d\vec{v}'\vec{v}'-v'dv'\frac{\vec{v}'\vec{v}'}{c^2}\right]=\int\frac{-k}{r^2}dr$$

$$E_k=\int\frac{m_ovdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\int\frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)d\vec{v}'\vec{v}'-v'dv'\frac{v'^2}{c^2}\right]=\int\frac{-k}{r^2}dr$$

$$E_k=\int\frac{m_ovdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\int\frac{m_ov'dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}-\frac{v'^2}{c^2}\right)=\int\frac{-k}{r^2}dr$$

$$E_k=\int\frac{m_ovdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\int\frac{m_ov'dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{-k}{r^2}dr \qquad dE_k=\frac{m_ovdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_ov'dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-k}{r^2}dr \qquad 21.56$$

$$E_k=-m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{-m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{k}{r}+constante \quad 21.57$$

$$E_R=-m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{k}{r}=constante \qquad E_R=\frac{-m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}-\frac{k}{r}=constante \quad 21.58$$

$$E_R=\frac{-m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}-\frac{k}{r}=-m_o c^2+\frac{m_o v'^2}{2}-\frac{k}{r} \qquad E_R=\frac{-m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{(0)^2}{c^2}}}-\frac{k}{\infty}=-m_o c^2 \quad 21.59$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{E_R}{m_o c^2}+\frac{k}{m_o c^2}\frac{1}{r} \quad 21.60$$

$$H=\frac{E_R}{m_o c^2} \qquad A=\frac{k}{m_o c^2}=\frac{GM_o m_o}{m_o c^2}=\frac{GM_o}{c^2} \quad 21.61$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=H+A\frac{1}{r} \qquad \frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3 \quad 21.62$$

$$\vec{L}'=\vec{r}'\times\vec{v}'=-r\hat{r}\times\left[-\left(\frac{dr}{dt'}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt'}\hat{\phi}\right)\right]=r^2\frac{d\phi}{dt'}\left(\hat{r}\times\hat{\phi}\right)=r^2\frac{d\phi}{dt'}\hat{k} \quad 21.63$$

$$\vec{L}'=\vec{r}'\times\vec{v}'=-\vec{r}\times\frac{-\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=r\hat{r}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\left(\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}r^2\frac{d\phi}{dt}\left(\hat{r}\times\hat{\phi}\right)=r^2\frac{d\phi}{dt'}\hat{k} \quad 21.63$$

$$\vec{L}'=r^2\frac{d\phi}{dt'}\vec{k}=L'\hat{k} \qquad L'=r^2\frac{d\phi}{dt'} \quad 21.64$$

$$dE_k=\frac{m_o v\,dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_o v'dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-k}{r^2}dr=\frac{k}{r^2}\hat{r}d\vec{r}' \quad 21.56$$

$$\frac{dE_k}{dt'}=\vec{F}'\vec{v}'=\frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}v'\frac{dv'}{dt'}=\frac{k}{r^2}\hat{r}\frac{d\vec{r}'}{dt'}=\frac{k}{r^2}\hat{r}\vec{v}'$$

$$\vec{F}'=\frac{m_o\vec{a}'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k}{r^2}\hat{r} \quad 21.65$$

$$\vec{F}'=\frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{-\left[\frac{d^2r}{dt'^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt'}\right)^2\right]\hat{r}-\left(2\frac{dr}{dt'}\frac{d\phi}{dt'}+r\frac{d^2\phi}{dt'^2}\right)\hat{\phi}\right\}=\frac{k}{r^2}\hat{r} \quad 21.66$$

$$\vec{F}'_{\hat{\phi}}=\frac{-m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(2\frac{dr}{dt'}\frac{d\phi}{dt'}+r\frac{d^2\phi}{dt'^2}\right)\hat{\phi}=zero \quad 21.67$$

$$\vec{F}'_{\hat{r}}=\frac{-m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2r}{dt'^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt'}\right)^2\right]\hat{r}=\frac{k}{r^2}\hat{r} \quad 21.68$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2r}{dt'^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt'}\right)^2\right]\hat{r}=\frac{-GM_o}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{d\phi}{dt'}=\frac{L'}{r^2} \qquad \frac{dr}{dt'}=-L'\frac{dw}{d\phi} \qquad \frac{d^2r}{dt'^2}=\frac{-L'^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2} \qquad \frac{d^2\phi}{dt'^2}=\frac{2L'^2}{r^3}\frac{dw}{d\phi} \quad 21.69$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{-L'^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2}-r\left(\frac{L'}{r^2}\right)^2\right]=\frac{-GM_o}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{-L'^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2}-\frac{L'^2}{r^3}\right)=\frac{-GM_o}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{-L'^2}{r^2}\right)=\frac{-GM_o}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{GM_o}{L'^2} \quad 21.70$$

$$-\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{GM_o}{L'^2} \quad 21.71$$

§25 Espiral Logarítmica continuação

$$-\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{GM_o}{L'^2}$$ 21.71

$$\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{-GM_o}{L'^2}$$

$$\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=-B \qquad H=\frac{E_R}{m_oc^2} \qquad A=\frac{GM_o}{c^2} \qquad B=\frac{GM_o}{L'^2}$$

$$\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)+B=\text{zero}$$

$$\left(H^3+3H^2A\frac{1}{r}+3HA^2\frac{1}{r^2}+A^3\frac{1}{r^3}\right)\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)+B=\text{zero}$$

$$H^3+3H^2A\frac{1}{r}+3HA^2\frac{1}{r^2}+A^3\frac{1}{r^3}\cong H^3+3H^2A\frac{1}{r} \qquad 3HA^2\frac{1}{r^2}+A^3\frac{1}{r^3}\cong\text{zero}$$

$$\left(H^3+3AH^2\frac{1}{r}\right)\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)+B=\text{zero}$$

$$\left(H^3+3AH^2w\right)\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+w\right)+B=\text{zero}$$

$$H^3\frac{d^2w}{d\phi^2}+H^3w+3AH^2\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3AH^2w^2+B=\text{zero}$$

$$w=\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)] \qquad \frac{dw}{d\phi}=\frac{-Q\text{sen}(\phi Q)}{D} \qquad \frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}$$ 21.38

A primeira hipótese para obter uma solução particular da equação diferencial é supor o raio infinito $r=\infty$, assim fazendo obtemos:

$$w=\frac{1}{r=\infty}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]=\text{zero}\Rightarrow\varepsilon\cos(\phi Q)=-1 \qquad \frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}=\frac{-Q^2\varepsilon\cos(\phi Q)}{\varepsilon D}=\frac{Q^2}{\varepsilon D}$$

$$H^3\frac{d^2w}{d\phi^2}+H^3w+3AH^2\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3AH^2w^2+B=\text{zero}$$

$$w=\text{zero} \qquad \frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{Q^2}{\varepsilon D} \qquad H=\frac{E_R}{m_oc^2}=\frac{-m_oc^2}{m_oc^2}=-1$$

$$(-1)^3\left(\frac{Q^2}{\varepsilon D}\right)+(-1)^3(\text{zero})+3A(-1)^2\left(\frac{Q^2}{\varepsilon D}\right)(\text{zero})+3A(-1)^2(\text{zero})^2+B=\text{zero}$$

$$-\left(\frac{Q^2}{\varepsilon D}\right)+B=\text{zero} \qquad -\frac{\varepsilon DQ^2}{\varepsilon D}+\varepsilon DB=\text{zero}$$

$$-Q^2+1=\text{zero} \qquad Q^2=1$$

Este resultado demonstra que no infinito a influência da massa central é zero $M_o=\text{zero}$.

A segunda hipótese para obter outra solução particular da equação diferencial é obtida observando que o ângulo (ϕQ) da equação $\varepsilon\cos(\phi Q)=-1$ indica a direção do raio infinito $r=\infty$ onde a influência da massa central é zero $M_o=\text{zero}$ e $Q^2=1$, por isso a direção do centro de massa é dada pelo ângulo $(\phi Q+\pi)$ que substituído na equação $\varepsilon\cos(\phi Q)=-1$ resulta na nova equação $\varepsilon\cos(\phi Q+\pi)=-1$ que indica direção oposta à direção do raio infinito que é a direção do centro de massa:

$$\varepsilon\cos(\phi Q+\pi)=-1 \qquad \cos(\phi Q+\pi)=-\cos(\phi Q) \qquad \varepsilon[-\cos(\phi Q)]=-1 \qquad \varepsilon\cos(\phi Q)=1$$

$$w=\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]=\frac{1}{\varepsilon D}(1+1)=\frac{2}{\varepsilon D} \qquad \frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}=\frac{-Q^2\varepsilon\cos(\phi Q)}{\varepsilon D}=\frac{-Q^2}{\varepsilon D}$$

$$w=\frac{2}{\varepsilon D} \qquad \frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{-Q^2}{\varepsilon D} \qquad H=\frac{E_R}{m_oc^2}=\frac{-m_oc^2}{m_oc^2}=-1$$

$$H^3\frac{d^2w}{d\phi^2}+H^3w+3AH^2\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3AH^2w^2+B=\text{zero}$$

$$(-1)^3\left(\frac{-Q^2}{\varepsilon D}\right)+(-1)^3\left(\frac{2}{\varepsilon D}\right)+3A(-1)^2\left(\frac{-Q^2}{\varepsilon D}\right)\left(\frac{2}{\varepsilon D}\right)+3A(-1)^2\left(\frac{2}{\varepsilon D}\right)^2+B=\text{zero}$$

$$-\left(\frac{-Q^2}{\varepsilon D}\right)-\left(\frac{2}{\varepsilon D}\right)+3A\left(\frac{-Q^2}{\varepsilon D}\right)\left(\frac{2}{\varepsilon D}\right)+3A\left(\frac{2}{\varepsilon D}\right)^2+B=\text{zero}$$

$$\frac{Q^2}{\varepsilon D}-\frac{2}{\varepsilon D}-3A\frac{Q^2}{\varepsilon D}\frac{2}{\varepsilon D}+3A\frac{4}{\varepsilon^2D^2}+B=\text{zero}$$

$$\frac{Q^2}{\varepsilon D}-\frac{2}{\varepsilon D}-\frac{6AQ^2}{\varepsilon^2D^2}+\frac{12A}{\varepsilon^2D^2}+B=\text{zero}$$

$$\frac{\varepsilon DQ^2}{\varepsilon D}-\frac{2\varepsilon D}{\varepsilon D}-\frac{\varepsilon D6AQ^2}{\varepsilon^2D^2}+\frac{\varepsilon D12A}{\varepsilon^2D^2}+\varepsilon DB=\text{zero} \qquad \varepsilon DB=\frac{\varepsilon DGM_o}{L'^2}=\frac{\varepsilon DGM_o}{\varepsilon DGM_o}=1$$

$$Q^2-2-\frac{6AQ^2}{\varepsilon D}+\frac{12A}{\varepsilon D}+1=\text{zero}$$

$$Q^2-1-\frac{6AQ^2}{\varepsilon D}+\frac{12A}{\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$Q^2-\frac{6AQ^2}{\varepsilon D}=1-\frac{12A}{\varepsilon D} \qquad Q^2=\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}$$

Aplicando os resultados da segunda hipótese na equação diferencial:

$$H^3\frac{d^2w}{d\phi^2}+H^3w+3AH^2\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3AH^2w^2+B=\text{zero}$$

$$w=\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)] \qquad \frac{dw}{d\phi}=\frac{-Q\,\text{sen}(\phi Q)}{D} \qquad \frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D} \tag{21.38}$$

$$H^3\left[\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\right]+H^3\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]+3AH^2\left[\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\right]\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]+$$
$$+3AH^2\left\{\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]\right\}^2+B=\text{zero}$$

$$-H^3Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H^3\frac{1}{\varepsilon D}+H^3\frac{1}{\varepsilon D}\varepsilon\cos(\phi Q)+3AH^2\left[\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\right]\frac{1}{\varepsilon D}+3AH^2\left[\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\right]\frac{1}{\varepsilon D}\varepsilon\cos(\phi Q)+$$
$$+3AH^2\left\{\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\left[1+2\varepsilon\cos(\phi Q)+\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)\right]\right\}+B=\text{zero}$$

$$-H^3Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H^3}{\varepsilon D}+H^3\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-3AH^2Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}\left[1+2\varepsilon\cos(\phi Q)+\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)\right]+B=\text{zero}$$

$$-H^3Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H^3}{\varepsilon D}+H^3\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-3AH^2Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}2\varepsilon\cos(\phi Q)+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)+B=\text{zero}$$

$$-H^3Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H^3}{\varepsilon D}+H^3\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-3AH^2Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}+\frac{6AH^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+3AH^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+B=\text{zero}$$

$$\frac{-H^3Q^2}{3AH^2}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H^3}{3AH^2\varepsilon D}+\frac{H^3}{3AH^2}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{3AH^2\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{3AH^2}\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3AH^2}{3AH^2\varepsilon^2D^2}+\frac{6AH^2}{3AH^2\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3AH^2}{3AH^2}\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\frac{B}{3AH^2}=\text{zero}$$

$$\frac{-HQ^2}{3A}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{H}{3A}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\frac{B}{3AH^2}=\text{zero}$$

$$\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}-Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}-\frac{HQ^2}{3A}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+$$
$$+\frac{2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3AH^2}=\text{zero}$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(-\frac{HQ^2}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{B}{3AH^2}=\text{zero}$$

$$H=\frac{E_R}{m_o c^2}=\frac{-m_o c^2}{m_o c^2}=-1$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(-\frac{(-1)Q^2}{3A}+\frac{(-1)}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{(-1)}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{B}{3A(-1)^2}=\text{zero}$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{1}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{B}{3A}=\text{zero}$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{1}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{\varepsilon DB}{3A\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\varepsilon DB=\frac{\varepsilon DGM_o}{L'^2}=\frac{\varepsilon DGM_o}{\varepsilon DGM_o}=1$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{1}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{1}{3A\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=\text{zero}$$

$$\text{zero}<r(\phi Q)<\infty\rightarrow M_o\neq\text{zero}\rightarrow Q=\frac{\sqrt{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}}{\sqrt{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}}$$

$$\left[1-\left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right)\right]\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left[\frac{1}{3A}\left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right)-\frac{1}{3A}-\frac{1}{\varepsilon D}\left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right)+\frac{2}{\varepsilon D}\right]\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=\text{zero}$$

$$\left[1-\frac{6A}{\varepsilon D}-\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)\right]\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left[\frac{1}{3A}\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)-\frac{1}{3A}\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)-\frac{1}{\varepsilon D}\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)+\frac{2}{\varepsilon D}\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\right]\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)=\text{zero}$$

$$\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}-1+\frac{12A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{1}{3A}-\frac{1}{3A}\frac{12A}{\varepsilon D}-\frac{1}{3A}+\frac{1}{3A}\frac{6A}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}-\frac{2}{\varepsilon D}\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\left(\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{-\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)^2-4\frac{6A}{\varepsilon D}\left(\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}\right)}}{2\frac{6A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{24A}{\varepsilon D}\left(\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}\right)}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{24A}{\varepsilon D}\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{24A}{\varepsilon D}\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\frac{1}{\varepsilon D}\sqrt{1-\frac{24A}{\varepsilon D}+\frac{24A}{\varepsilon D}\frac{6A}{\varepsilon D}}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\frac{1}{\varepsilon D}\sqrt{1-2\frac{12A}{\varepsilon D}+\frac{144A^2}{\varepsilon^2D^2}}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\frac{1}{\varepsilon D}\sqrt{\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)^2}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\frac{1}{\varepsilon D}\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\left(\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}\right)}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}-\left(\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}\right)}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{1}{\varepsilon D}$$

Onde aplicando o resultado da segunda hipótese $\varepsilon\cos(\phi Q)=1\Rightarrow\cos(\phi Q)=\frac{1}{\varepsilon}$:

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{D}=\frac{1}{\varepsilon D}$$

Que é uma identidade demonstrando que o resultado da segunda hipótese está correto

$$Q^2=\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\approx 1-\frac{6A}{\varepsilon D} \qquad Q^2=1-\frac{6A}{\varepsilon D} \qquad A=\frac{GM_o}{c^2}$$

$$\varepsilon D=a(1-\varepsilon^2)=57.909.227.000{,}00\left[1-(0{,}20563593)^2\right]=55.460.469.568{,}40$$

$$A=\frac{GM_o}{c^2}=\frac{6{,}6740831.10^{-11}.1{,}9891.10^{30}}{\left(2{,}99792458.10^{8}\right)^2}=1.477{,}089.535.42$$

$$Q=\sqrt{\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}}=0{,}999.999.920.1 \qquad Q=\sqrt{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}=0{,}999.999.920.1$$

$1{,}276.789.102.53^{-14}$

$$\phi.Q=1.296.000{,}00\Rightarrow\phi=\frac{1.296.000{,}00}{Q}$$ $Q<1$ Avanço $Q>1$ Retrocesso

$$\Delta\phi=\left(\frac{1}{Q}-1\right)1.296.000{,}00$$ $\Delta\phi>\text{zero}$ Avanço $\Delta\phi<\text{zero}$ Retrocesso

$$\Delta\phi=\left[\frac{1}{\left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right)^{\frac{1}{2}}}-1\right]1.296.000{,}00=0{,}103.549.893.544''$$

$$\Delta\phi=\left[\frac{1}{\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)^{\frac{1}{2}}}-1\right]1.296.000{,}00=0{,}103.549.876.997''$$

$$N=100.\frac{PT}{PM}=100\frac{365{,}256.363.004}{87{,}969}=415{,}210.316.139$$

$$\sum\Delta\phi=\Delta\phi.N=0{,}103.549.893.544 \ \text{x} \ 415{,}210.316.139=42{,}994.984.034.7''$$

$$\sum\Delta\phi=\Delta\phi.N=0{,}103.549.876.997 \ \text{x} \ 415{,}210.316.139=42{,}994.977.164.2''$$

Energia Newtoniana E_N

$$E_N=\frac{m_o u^2}{2}-\frac{k}{r}$$

$$u^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}$$

$$E_N = \frac{m_o}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2}\right] - \frac{k}{r}$$

$$\frac{2E_N}{m_o} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2k}{m_o}\frac{1}{r}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2k}{m_o}\frac{1}{r} - \frac{2E_N}{m_o} = zero$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{r^2} \qquad \frac{dr}{dt} = -L\frac{dw}{d\phi} \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{-L^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2} \qquad \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{2L^2}{r^3}\frac{dw}{d\phi}$$

$$\left(-L\frac{dw}{d\phi}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2k}{m_o}\frac{1}{r} - \frac{2E_N}{m_o} = zero$$

$$\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2k}{m_o L^2}\frac{1}{r} - \frac{2E_N}{m_o L^2} = zero$$

$$\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2k}{m_o L^2}\frac{1}{r} - \frac{2E_N}{m_o L^2} = zero$$

$$\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 + w^2 - \frac{2k}{m_o L^2}w - \frac{2E_N}{m_o L^2} = zero$$

$$x = \frac{2k}{m_o L^2} \qquad y = \frac{2E_N}{m_o L^2}$$

$$\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 + w^2 - xw - y = zero$$

$$w = \frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon D}\left[1 + \varepsilon\cos(\phi Q)\right] \qquad \frac{dw}{d\phi} = \frac{-Q sen(\phi Q)}{D} \qquad \frac{d^2w}{d\phi^2} = \frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}$$

$$\left[\frac{-Q sen(\phi Q)}{D}\right]^2 + \left\{\frac{1}{\varepsilon D}\left[1 + \varepsilon\cos(\phi Q)\right]\right\}^2 - x\frac{1}{\varepsilon D}\left[1 + \varepsilon\cos(\phi Q)\right] - y = zero$$

$$\frac{Q^2}{D^2}\left[1 - \cos^2(\phi Q)\right] + \frac{1}{\varepsilon^2 D^2}\left[1 + 2\varepsilon\cos(\phi Q) + \varepsilon^2\cos^2(\phi Q)\right] - x\frac{1}{\varepsilon D} - x\frac{1}{\varepsilon D}\varepsilon\cos(\phi Q) - y = zero$$

$$\frac{Q^2}{D^2} - \frac{Q^2}{D^2}\cos^2(\phi Q) + \frac{1}{\varepsilon^2 D^2} + \frac{1}{\varepsilon^2 D^2}2\varepsilon\cos(\phi Q) + \frac{1}{\varepsilon^2 D^2}\varepsilon^2\cos^2(\phi Q) - \frac{x}{\varepsilon D} - x\frac{\cos(\phi Q)}{D} - y = zero$$

$$\frac{Q^2}{D^2} - Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} + \frac{1}{\varepsilon^2 D^2} + \frac{2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} - \frac{x}{\varepsilon D} - x\frac{\cos(\phi Q)}{D} - y = zero$$

$$\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} - Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} + \frac{2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D} - x\frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{Q^2}{D^2} + \frac{1}{\varepsilon^2 D^2} - \frac{x}{\varepsilon D} - y = zero$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{2}{\varepsilon D}-x\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{Q^2}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-y=zero$$

Energia Newtoniana E_N

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(x-\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{Q^2}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$r=\infty\rightarrow Q=1\rightarrow w=\frac{1}{r=\infty}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]=\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=zero$$

$$\left(1-Q^2\right)\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)+\left(x-\frac{2}{\varepsilon D}\right)\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)+\frac{Q^2}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$\left(1-Q^2\right)\left(\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}\right)-\frac{x}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{Q^2}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{Q^2}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{Q^2}{D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$-\frac{Q^2}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{Q^2}{D^2}+\frac{4}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{2x}{\varepsilon D}-y=zero \qquad Q^2=1$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{1}{D^2}+\frac{4}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{2x}{\varepsilon D}-y=zero$$

$$-\frac{\varepsilon^2 D^2}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{\varepsilon^2 D^2}{D^2}+\frac{4\varepsilon^2 D^2}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{2x\varepsilon^2 D^2}{\varepsilon D}-\varepsilon^2 D^2 y=zero$$

$$-1+\varepsilon^2+4-2x\varepsilon D-\varepsilon^2 D^2 y=zero$$

$$x=\frac{2}{\varepsilon D} \qquad y=\frac{2E_N}{m_o L^2} \qquad L^2=\varepsilon DGM \qquad \frac{1}{a}=\frac{-1}{\varepsilon D}\left(\varepsilon^2-1\right)$$

$$-1+\varepsilon^2+4-2\frac{2}{\varepsilon D}\varepsilon D-\varepsilon^2 D^2 y=zero \qquad -1+\varepsilon^2-\varepsilon^2 D^2 y=zero$$

$$-1+\varepsilon^2-\varepsilon^2 D^2\frac{2E_N}{m_o L^2}=zero \qquad -1+\varepsilon^2-\varepsilon^2 D^2\frac{2E_N}{m_o\varepsilon DGM_o}=zero$$

$$-1+\varepsilon^2-\varepsilon D\frac{2E_N}{GM_o m_o}=zero \qquad \frac{1}{\varepsilon D}\left(\varepsilon^2-1\right)=\frac{2E_N}{k}$$

$$E_N=\frac{-k}{2a}$$

§27 Avanço do Periélio de Mercúrio de 42,99" " Condições de Contorno"

Comecemos da equação que expressa o equilíbrio de forças:

$$\vec{F}'=\frac{m_o\vec{a}'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k}{r^2}\hat{r} \qquad 21.65$$

No lado direito temos a força gravitacional $\frac{k}{r^2}\hat{r}$ definida por Newton, no lado esquerdo temos a descrição física de Força $\vec{F}'=\frac{m_O\vec{a'}}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ da Relatividade Ondulatória.

As propriedades físicas da equação 21.65 exige sua validade quando seu raio varia desde um raio maior que zero até um raio infinito, portanto o raio varia de $zero < r \leq \infty$, e por isso temos duas distintas condições de contorno a primeira condição de contorno é quando o raio é infinito $r=\infty$ e a força gravitacional é zero, o que significa que a partícula está em repouso com $v'=zero$ e $\vec{a'}=zero$ e a segunda condição de contorno é quando o raio é maior que zero e menor que o infinito $zero < r < \infty$ o que significa que a partícula está em movimento devido à influência de uma força gravitacional 21.65 com $v' \neq zero$ e $\vec{a'} \neq zero$.

No §26 na sequência dos cálculos substitui-se em 21.65 as **igualdade** 21.62, 21.69 e

$$\mathrm{H}=\frac{\mathrm{E_R}}{\mathrm{m_o c^2}} \qquad \mathrm{A}=\frac{\mathrm{GM_o}}{\mathrm{c^2}} \qquad \mathrm{B}=\frac{\mathrm{GM_o}}{\mathrm{L'^2}}$$, mais $w=\frac{1}{r}$.

Após essas substituições obtemos a equação diferencial:

$$\mathrm{H^3\frac{d^2w}{d\phi^2}+H^3w+3AH^2\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3AH^2w^2+B=zero} \qquad 27.1$$

Está equação tem que ser valida para as mesmas condições de contorno que a equação 21.65, ou seja, tem que ter validade desde um raio r maior que zero $(r > zero)$ até um raio infinito $(zero < r \leq \infty)$. A sua solução exata é dada por:

$$\mathrm{w=\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]} \qquad 27.2$$

Que deve abranger as duas condições de contornos já descritas.

Aplicando a solução 27.2 na equação diferencial 27.1 temos:

$$\mathrm{H^3\frac{d^2w}{d\phi^2}+H^3w+3AH^2\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3AH^2w^2+B=zero}$$

$$\mathrm{w=\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]} \qquad \mathrm{\frac{dw}{d\phi}=\frac{-Q sen(\phi Q)}{D}} \qquad \mathrm{\frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}} \qquad 21.38$$

$$\mathrm{H^3\left[\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\right]+H^3\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]+3AH^2\left[\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\right]\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]+}$$
$$\mathrm{+3AH^2\left\{\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon\cos(\phi Q)]\right\}^2+B=zero}$$

$$-H^3Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H^3\frac{1}{\varepsilon D}+H^3\frac{1}{\varepsilon D}\varepsilon\cos(\phi Q)+3AH^2\left[\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\right]\frac{1}{\varepsilon D}+3AH^2\left[\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\right]\frac{1}{\varepsilon D}\varepsilon\cos(\phi Q)+$$
$$+3AH^2\left\{\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\left[1+2\varepsilon\cos(\phi Q)+\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)\right]\right\}+B=\text{zero}$$

$$-H^3Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H^3}{\varepsilon D}+H^3\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-3AH^2Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}\left[1+2\varepsilon\cos(\phi Q)+\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)\right]+B=\text{zero}$$

$$-H^3Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H^3}{\varepsilon D}+H^3\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-3AH^2Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}2\varepsilon\cos(\phi Q)+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}\varepsilon^2\cos^2(\phi Q)+B=\text{zero}$$

$$-H^3Q^2\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H^3}{\varepsilon D}+H^3\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-3AH^2Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3AH^2}{\varepsilon^2D^2}+\frac{6AH^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+3AH^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+B=\text{zero}$$

$$\frac{-H^3Q^2}{3AH^2}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H^3}{3AH^2\varepsilon D}+\frac{H^3}{3AH^2}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{3AH^2\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3AH^2Q^2}{3AH^2}\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{3AH^2}{3AH^2\varepsilon^2D^2}+\frac{6AH^2}{3AH^2\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{3AH^2}{3AH^2}\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\frac{B}{3AH^2}=\text{zero}$$

$$\frac{-HQ^2}{3A}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{H}{3A}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\frac{B}{3AH^2}=\text{zero}$$

$$\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}-Q^2\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}-\frac{HQ^2}{3A}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A}\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+$$
$$+\frac{2}{\varepsilon D}\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3AH^2}=\text{zero}$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(-\frac{HQ^2}{3A}+\frac{H}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{H}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3AH^2}=\text{zero}$$

$$H=\frac{E_R}{m_oc^2}=\frac{-m_oc^2}{m_oc^2}=-1$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(-\frac{(-1)Q^2}{3A}+\frac{(-1)}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{(-1)}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3A(-1)^2}=\text{zero}$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{1}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{B}{3A}=\text{zero}$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{1}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{\varepsilon DB}{3A\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\varepsilon DB=\frac{\varepsilon DGM_o}{L'^2}=\frac{\varepsilon DGM_o}{\varepsilon DGM_o}=1$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{1}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{1}{3A\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=\text{zero} \qquad 27.3$$

Esta equação deve ter solução para as mesmas duas condições de contorno de 21.65.

Solução de 27.3 para a primeira condição de contorno que é quando o raio é infinito $r=\infty$, e a força gravitacional é zero o que significa que a partícula está em repouso e temos $v'=zero$ e $\overrightarrow{a'}=zero$:

Aplicando $Q^2=1$ em 27.3 obtemos:

$$(1-1^2)\frac{cos^2(\emptyset 1)}{D^2}+\left(\frac{1^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{1^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{cos(\emptyset 1)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=zero.$$

$$\frac{cos(\emptyset)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=zero \qquad \varepsilon=\frac{-1}{cos(\emptyset)} \qquad 27.4$$

A equação 27.4 é exatamente igual ao resultado da equação 27.2 quando o raio é infinito $r=\infty$, w = zero e Q = 1, como se comprova em 27.5:

$$w=\frac{1}{r=\infty}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon cos(\emptyset Q)]=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon cos(\emptyset 1)]=\frac{cos(\emptyset)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=zero \qquad 27.5$$

Portanto em 27.4 temos um resultado exato que descreve como no infinito a excentricidade ε se relaciona com o ângulo $\emptyset$ do raio infinito da partícula, sendo $\varepsilon\geq 1$ o que significa que o movimento a partir do infinito será ou parabólico com $\varepsilon=1$ ou hiperbólico com $\varepsilon>1$. Observemos que por definição $\varepsilon>zero$.

Solução de 27.3 para a segunda condição de contorno que é quando o raio é maior que zero e menor que o infinito $zero<r<\infty$ o que significa que a partícula está em movimento devido à influência de uma força gravitacional com $v'\neq zero$ e $\overrightarrow{a'}\neq zero$.

Aplicando $Q=\frac{\sqrt{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}}{\sqrt{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}}$ em 27.3 temos:

$$\left(1-Q^2\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{Q^2}{3A}-\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=\text{zero} \qquad 27.3$$

$$\left[1-\left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right)\right]\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left[\frac{1}{3A}\left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right)-\frac{1}{3A}-\frac{1}{\varepsilon D}\left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right)+\frac{2}{\varepsilon D}\right]\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}=\text{zero}$$

$$\left[1-\frac{6A}{\varepsilon D}-\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)\right]\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left[\frac{1}{3A}\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)-\frac{1}{3A}\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)-\frac{1}{\varepsilon D}\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)+\frac{2}{\varepsilon D}\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\right]\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}\right)=\text{zero}$$

$$\left(1-\frac{6A}{\varepsilon D}-1+\frac{12A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(\frac{1}{3A}-\frac{1}{3A}\frac{12A}{\varepsilon D}-\frac{1}{3A}+\frac{1}{3A}\frac{6A}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}-\frac{2}{\varepsilon D}\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\left(\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2}+\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)\frac{\cos(\phi Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}=\text{zero}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{-\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)^2-4\frac{6A}{\varepsilon D}\left(\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}\right)}}{2\frac{6A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{24A}{\varepsilon D}\left(\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}\right)}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}-\frac{24A}{\varepsilon D}\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}+\frac{24A}{\varepsilon D}\frac{1}{\varepsilon^2 D^2}\frac{6A}{\varepsilon D}}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\frac{1}{\varepsilon D}\sqrt{1-\frac{24A}{\varepsilon D}+\frac{24A}{\varepsilon D}\frac{6A}{\varepsilon D}}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\frac{1}{\varepsilon D}\sqrt{1-2\frac{12A}{\varepsilon D}+\frac{144A^2}{\varepsilon^2 D^2}}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\frac{1}{\varepsilon D}\sqrt{\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)^2}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\frac{1}{\varepsilon D}\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\pm\left(\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}\right)}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}-\left(\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}\right)}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{\frac{1}{\varepsilon D}\frac{12A}{\varepsilon D}}{\frac{12A}{\varepsilon D}}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D}=\frac{1}{\varepsilon D}$$

$$-\frac{cos(\emptyset Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}=zero \qquad \varepsilon=\frac{1}{cos(\emptyset Q)} \qquad 27.6$$

Na teoria das cônicas para a Hipérbole temos $\varepsilon=\frac{c}{a}$ igualando a 27.6 temos $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{1}{cos(\emptyset Q)}$ Desta resulta $a=c.cos(\emptyset Q)$ que é a fórmula correta do semieixo maior da Hipérbole.

Portanto em 27.6 temos um resultado exato que descreve como no percurso de $zero<r<\infty$ a excentricidade ε se relaciona com o ângulo $\emptyset$ da partícula, sendo $\varepsilon\geq 1$ o que significa que o movimento será ou Parabólico com $\varepsilon=1$ ou Hiperbólico com $\varepsilon>1$. Observemos que por definição $\varepsilon>zero$.

§28 Avanço do Periélio simplificado

Retrocesso do Periélio $\quad \mathbf{Q>1}$

Imaginemos que o sol e Mercúrio sejam duas partículas, estando o Sol situado na origem de um sistema de coordenadas e Mercúrio situado em um ponto A no plano xy. O raio vetor $\vec{r}=r\hat{r}$ que liga a origem até o ponto A descreverá o movimento de Mercúrio no plano xy.

Na descrição do movimento do planeta Mercúrio para o observador O' corresponde as variáveis com linha para o observador O as sem linha sendo utilizado um único raio $\vec{r}=r\hat{r}$ e um único sistema de coordenada para ambos os observadores.

O tempo t' é uma função do tempo t isto é $t'=t'(t)$ e o tempo t é uma função do tempo t' isto é $t=t(t')$.

$$dt=dt'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} \qquad dt'=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad 21.02$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}=1 \qquad 21.03$$

$$v'=\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad v=\frac{v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad 21.04$$

$$dt>dt' \qquad v'>v \qquad vdt=v'dt' \qquad 21.05$$

$$\vec{r}=r\hat{r} \qquad d\vec{r}=dr\hat{r}+rd\hat{r} \qquad \hat{r}.d\vec{r}=dr\hat{r}.\hat{r}+r\hat{r}.d\hat{r}=dr \qquad 28.01$$

O raio pode ser considerado uma função do tempo $t'=t'(t)$ ou seja, $\vec{r}=\vec{r}(t')=\vec{r}[t'(t)]$ ou pode ser considerado uma função do tempo $t=t(t')$ ou seja, $\vec{r}=\vec{r}(t)=\vec{r}[t(t')]$.

$$\vec{r}=\vec{r}(t')=\vec{r}[t'(t)] \qquad \vec{r}=\vec{r}(t)=\vec{r}[t(t')] \qquad 28.02$$

$$\vec{v}'=\frac{d\vec{r}}{dt'}=\frac{dr}{dt'}\hat{r}+r\frac{d\emptyset}{dt'}\hat{\emptyset} \qquad \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\emptyset}{dt}\hat{\emptyset}$$

$$\vec{v}'=\frac{d\vec{r}}{dt'}=\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{dt'}=\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{1}{\frac{dt'}{dt}}=\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt'}\frac{dt'}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt'}\frac{1}{\frac{dt}{dt'}}=\frac{\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$$

$$\vec{v}'=\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \vec{v}=\frac{\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad 28.03$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2(r\hat{r})}{dt^2}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right]\hat{r}+\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\emptyset}{dt}+r\frac{d^2\emptyset}{dt^2}\right)\hat{\emptyset} \qquad 28.04$$

$$\vec{a}'=\frac{d\vec{v}'}{dt'}=\frac{d^2\vec{r}}{dt'^2}=\frac{d^2(r\hat{r})}{dt'^2}=\left[\frac{d^2r}{dt'^2}-r\left(\frac{d\emptyset}{dt'}\right)^2\right]\hat{r}+\left(2\frac{dr}{dt'}\frac{d\emptyset}{dt'}+r\frac{d^2\emptyset}{dt'^2}\right)\hat{\emptyset} \qquad 28.05$$

Ambas as velocidades e as acelerações são positivas.

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$\vec{F}' = \frac{m_o\vec{a}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \vec{F} = \frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}}{dt} + v\frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right] \quad 28.06$$

$$E_k = \int \vec{F}'.d\vec{r} = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int -\frac{k}{r^2}\hat{r}.d\vec{r} \quad 28.07$$

$$E_k = \int \frac{m_o\vec{a}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}.d\vec{r} = \int \frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}}{dt} + v\frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right].d\vec{r} = \int -\frac{k}{r^2}\hat{r}.d\vec{r}$$

$$E_k = \int \frac{m_o v' dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \int \frac{m_o v dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int -\frac{k}{r^2}dr \qquad dE_k = \vec{F}.d\vec{r} = \frac{m_o v' dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{m_o v dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{r^2}dr \quad 28.08$$

$$E_k = m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{k}{r} + constante \quad E_R = m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - \frac{k}{r} = m_o c^2 \quad 28.09$$

$$E_R = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{k}{r} = m_o c^2 \qquad \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(1 + \frac{k}{m_o c^2}\frac{1}{r}\right)^3 = \left(1 + A\frac{1}{r}\right)^3 \quad 28.10$$

Nesta primeira variante à energia cinética relativística é maior que a energia inercial $\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > m_o c^2$.Isso ocasiona o retrocesso do periélio de Mercúrio. O planeta parece mais pesado devido o movimento.

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m_o v'\frac{dv'}{dt'}}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{m_o v\frac{dv}{dt}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{r^2}dr = -\frac{k}{r^2}\hat{r}.\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{F}.\vec{v} = \frac{m_o\vec{v}'\frac{d\vec{v}'}{dt'}}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)} = \frac{m_o\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{r^2}dr = -\frac{k}{r^2}\hat{r}.\vec{v}$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{F}.\vec{v} = \frac{m_o\vec{v}'.\vec{a}'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)} = \frac{m_o\vec{v}.\vec{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}.\vec{v} \qquad \vec{F} = \frac{m_o\vec{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} \quad 28.11$$

$$\vec{F} = \frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\emptyset}{dt} + r\frac{d^2\emptyset}{dt^2}\right)\hat{\emptyset}\right\} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F}_{\hat{\emptyset}} = \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\emptyset}{dt} + r\frac{d^2\emptyset}{dt^2}\right)\hat{\emptyset} = zero \qquad \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\emptyset}{dt}\right) = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\emptyset}{dt} + r\frac{d^2\emptyset}{dt^2} = zero$$

$$\vec{F}_{\hat{r}} = \frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right]\hat{r} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right] = -\frac{k}{r^2}$$

$$\frac{d\emptyset}{dt} = \frac{L}{r^2} \qquad \frac{dr}{dt} = -L\frac{dw}{d\emptyset} \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{-L^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2}$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{-L^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2} - r\left(\frac{L}{r^2}\right)^2\right] = -\frac{k}{m_o}\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{L^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + r\left(\frac{L}{r^2}\right)^2\right] = \frac{k}{m_o}\frac{1}{r^2}$$

$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d^2w}{d\emptyset^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{k}{m_o L^2}$ $\qquad A=\frac{k}{m_o c^2}$ $\qquad B=\frac{k}{m_o L^2}$

$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(1+A\frac{1}{r}\right)^3=1^3+3A\frac{1}{r}+3A^2\frac{1}{r^2}+A^3\frac{1}{r^3}\cong 1+3A\frac{1}{r}$ $\qquad 3A^2\frac{1}{r^2}+A^3\frac{1}{r^3}\cong zero$

$\left(1+3A\frac{1}{r}\right)\left(\frac{d^2w}{d\emptyset^2}+\frac{1}{r}\right)=B$ 28.12

$\left(1+3A\frac{1}{r}\right)\frac{d^2w}{d\emptyset^2}+\left(1+3A\frac{1}{r}\right)\frac{1}{r}-B=zero$

$\frac{d^2w}{d\emptyset^2}+3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}+3A\frac{1}{r^2}-B=zero$

$\frac{d^2w}{d\emptyset^2}+3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}w+\mathrm{w}+3Aw^2-B=zero$

$\frac{d^2w}{d\emptyset^2}+\mathrm{w}+3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}w+3Aw^2-B=zero$ 28.13

$w=\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon cos(\emptyset Q)]$ $\qquad \frac{dw}{d\emptyset}=\frac{-Qse\ \ (\emptyset Q)}{D}$ $\qquad \frac{d^2w}{d\emptyset^2}=\frac{-Q^2cos(\emptyset Q)}{D}$

$\frac{-Q^2cos(\emptyset Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon cos(\emptyset Q)]+3A\frac{-Q^2cos(\emptyset Q)}{D}\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon cos(\emptyset Q)]+3A\left\{\frac{1}{\varepsilon D}[1+\varepsilon cos(\emptyset Q)]\right\}^2-B=zero$

$-Q^2\frac{cos(\emptyset Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{cos(\emptyset Q)}{D}-3AQ^2\frac{1}{\varepsilon D}\frac{cos(\emptyset Q)}{D}-3AQ^2\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2}+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}+\frac{6A}{\varepsilon D}\frac{cos(\emptyset Q)}{D}+3A\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2}-B=zero$

$\left(3A-3AQ^2\right)\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2}+\left(1-Q^2-3AQ^2\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{cos(\emptyset Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{3A}{\varepsilon^2D^2}-B=zero$

$\left(\frac{3A}{3A}-\frac{3AQ^2}{3A}\right)\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2}+\left(\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{3A}-\frac{3AQ^2}{3A}\frac{1}{\varepsilon D}+\frac{6A}{3A\varepsilon D}\right)\frac{cos(\emptyset Q)}{D}+\frac{1}{3A\varepsilon}+\frac{3A}{3A\varepsilon^2D^2}-\frac{\varepsilon DB}{\varepsilon D3A}=zero$

$\varepsilon DB=\frac{\varepsilon D}{\mathrm{m_o}L^2}=\frac{\varepsilon DGM_o\mathrm{m_o}}{\mathrm{m_oGM_o}\varepsilon D}=1$

$(1-Q^2)\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2}+\left(\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{cos(\emptyset Q)}{D}+\frac{1}{3A\varepsilon D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}-\frac{1}{\varepsilon D3A}=zero$

$(1-Q^2)\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2}+\left(\frac{1}{3A}-\frac{Q^2}{3A}-\frac{Q^2}{\varepsilon D}+\frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{cos(\emptyset Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}=zero$ $\qquad Q^2=\frac{1+\frac{12\mathrm{A}}{\varepsilon D}}{1+\frac{6\mathrm{A}}{\varepsilon D}}$ 28.14

$\left[1-\left(\frac{1+\frac{12\mathrm{A}}{\varepsilon D}}{1+\frac{6\mathrm{A}}{\varepsilon D}}\right)\right]\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2}+\left[\frac{1}{3A}-\frac{1}{3A}\left(\frac{1+\frac{12\mathrm{A}}{\varepsilon D}}{1+\frac{6\mathrm{A}}{\varepsilon D}}\right)-\frac{1}{\varepsilon D}\left(\frac{1+\frac{12\mathrm{A}}{\varepsilon D}}{1+\frac{6\mathrm{A}}{\varepsilon D}}\right)+\frac{2}{\varepsilon D}\right]\frac{cos(\emptyset Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}=zero$

$$\left[1+\frac{6\mathrm{A}}{\varepsilon D}-1-\frac{12\mathrm{A}}{\varepsilon D}\right]\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2}+\left[\frac{1}{3A}\left(1+\frac{6\mathrm{A}}{\varepsilon D}\right)-\frac{1}{3A}\left(1+\frac{12\mathrm{A}}{\varepsilon D}\right)-\frac{1}{\varepsilon D}\left(1+\frac{12\mathrm{A}}{\varepsilon D}\right)+\frac{2}{\varepsilon D}\left(1+\frac{6\mathrm{A}}{\varepsilon D}\right)\right]\frac{cos(\emptyset Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\left(1+\frac{6\mathrm{A}}{\varepsilon D}\right)=zero$$

$-\frac{6\mathrm{A}}{\varepsilon D}\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2}+\left(\frac{1}{3A}+\frac{2}{\varepsilon D}-\frac{1}{3A}-\frac{4}{\varepsilon D}-\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{12\mathrm{A}}{\varepsilon^2D^2}+\frac{2}{\varepsilon D}+\frac{12\mathrm{A}}{\varepsilon^2D^2}\right)\frac{cos(\emptyset Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\frac{6\mathrm{A}}{\varepsilon D}=zero$

$-\frac{6\mathrm{A}}{\varepsilon D}\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2}+\left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)\frac{cos(\emptyset Q)}{D}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}+\frac{1}{\varepsilon^2D^2}\frac{6\mathrm{A}}{\varepsilon D}=zero$

$6\mathrm{A}\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2}+\frac{cos(\emptyset Q)}{D}-\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{6A}{\varepsilon^2D^2}=zero$

$\frac{cos(\emptyset Q)}{D}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4.6A\left(-\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{6A}{\varepsilon^2D^2}\right)}}{2.6A}$

$$\frac{cos(\emptyset Q)}{D} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\frac{24A}{\varepsilon D}+\frac{144A^2}{\varepsilon^2 D^2}}}{2.6A}$$

$$\frac{cos(\emptyset Q)}{D} = \frac{-1 \pm \sqrt{\left(1+\frac{12A}{\varepsilon D}\right)^2}}{12}$$

$$\frac{cos(\emptyset Q)}{D} = \frac{-1 \pm \left(1+\frac{12}{\varepsilon D}\right)}{12A}$$

$$\frac{cos(\emptyset Q)}{D} = \frac{-1+1+\frac{12A}{\varepsilon D}}{12A} = \frac{1}{\varepsilon D}$$

$$\frac{cos(\emptyset Q)}{D} = \frac{1}{\varepsilon D} \qquad \varepsilon - \frac{1}{cos(\emptyset Q)} = zero \qquad 28.15$$

Para a hipérbole a excentricidade (ε) é definida como $\varepsilon = \frac{1}{cos(\emptyset Q)}$ sendo ($\emptyset$) o ângulo da assíntota.

Avanço do Periélio $\quad$ $\mathbf{Q < 1}$

$$\mathrm{dt} = \mathrm{dt}'\sqrt{1+\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathrm{c}^2}} \qquad \mathrm{dt}' = \mathrm{dt}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}} \qquad \mathrm{dt} > dt'$$

$$\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}\sqrt{1+\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathrm{c}^2}} = 1$$

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{v}'}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathrm{c}^2}}} \qquad \mathrm{v}' = \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}} \qquad \mathrm{v}' > \mathrm{v}$$

$$\vec{\mathrm{r}} = \mathrm{r}\hat{\mathrm{r}} \qquad d\vec{\mathrm{r}} = \mathrm{d}\mathrm{r}\hat{\mathrm{r}} + \mathrm{r}\mathrm{d}\hat{\mathrm{r}} \qquad \hat{r}.d\vec{\mathrm{r}} = \mathrm{dr}\hat{\mathrm{r}}.\hat{\mathrm{r}} + \mathrm{r}\hat{\mathrm{r}}.\mathrm{d}\hat{\mathrm{r}} = dr$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{\mathrm{r}}}{dt} = \frac{\mathrm{dr}}{dt}\hat{\mathrm{r}} + \mathrm{r}\frac{d\emptyset}{dt}\hat{\emptyset} \qquad \vec{\mathrm{v}}' = \frac{d\vec{\mathrm{r}}}{dt'} = \frac{\mathrm{dr}}{dt}\hat{\mathrm{r}} + \mathrm{r}\frac{d\emptyset}{dt}\hat{\emptyset}$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{\vec{\mathrm{v}}'}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathrm{c}^2}}} \qquad \vec{\mathrm{v}}' = \frac{\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d^2\vec{\mathrm{r}}}{dt^2} = \frac{d^2(r\hat{r})}{dt^2} = \left[\frac{d^2\mathrm{r}}{dt^2} - \mathrm{r}\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right]\hat{\mathrm{r}} + \left(2\frac{\mathrm{dr}}{dt}\frac{d\emptyset}{dt} + \mathrm{r}\frac{d^2\emptyset}{dt^2}\right)\hat{\emptyset}$$

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{\mathrm{v}}'}{dt} = \frac{d^2\vec{\mathrm{r}}}{dt'^2} = \frac{d^2(r\hat{r})}{dt'^2} = \left[\frac{d^2\mathrm{r}}{dt'^2} - \mathrm{r}\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right]\hat{\mathrm{r}} + \left(2\frac{\mathrm{dr}}{dt'}\frac{d\emptyset}{dt'} + \mathrm{r}\frac{d^2\emptyset}{dt'^2}\right)\hat{\emptyset}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{dt}{dt}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\vec{\mathrm{v}}'}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathrm{c}^2}}}\right)$$

$$\vec{F} = \frac{m_o\vec{\mathrm{a}}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}} = \vec{F}' = \frac{m_o}{\left(1+\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathrm{c}^2}\right)\frac{d\vec{\mathrm{v}}'}{dt} - \mathrm{v}'\frac{d\mathrm{v}'}{dt}\frac{\vec{\mathrm{v}}'}{\mathrm{c}^2}\right] \qquad 28.16$$

$$E_k = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int \vec{F}'.d\vec{r} = \int -\frac{k}{r^2}\hat{r}.d\vec{r}$$

$$E_k = \int \frac{m_o\vec{\mathrm{a}}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}.d\vec{r} = \int \frac{m_o}{\left(1+\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathrm{c}^2}\right)\frac{d\vec{\mathrm{v}}'}{dt'} - \mathrm{v}'\frac{d\mathrm{v}'}{dt'}\frac{\vec{\mathrm{v}}'}{\mathrm{c}^2}\right].d\vec{r} = \int -\frac{k}{r^2}\hat{r}.d\vec{r}$$

$$E_k = \int \frac{m_o\mathrm{vdv}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}} = \int \frac{m_o\mathrm{v}'\mathrm{dv}'}{\left(1+\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int -\frac{k}{r^2}dr \qquad dE_k = \vec{F}'.d\vec{r} = \frac{m_o\mathrm{vdv}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}} = \frac{m_o\mathrm{v}'\mathrm{dv}'}{\left(1+\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{r^2}dr \qquad 28.17$$

$$E_k = -m_o\mathrm{c}^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}} = -\frac{m_o\mathrm{c}^2}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathrm{c}^2}}} = \frac{k}{r} + constante \qquad E_R = -m_o\mathrm{c}^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}} - \frac{k}{r} = -m_o\mathrm{c}^2 \qquad 28.18$$

$$E_R = -\frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} - \frac{k}{r} = -m_o c^2 \qquad \frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(1 - \frac{k}{m_o c^2}\frac{1}{r}\right)^3 = \left(1 - A\frac{1}{r}\right)^3 \qquad 28.19$$

Nesta segunda variante à energia cinética relativística é menor que a energia inercial $\frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} < m_o c^2$.Isso ocasiona o avanço do periélio de Mercúrio. O planeta realmente está mais leve devido o movimento.

$$\frac{dE_k}{dt\prime} = \vec{F}'.\frac{d\vec{r}}{dt\prime} = \frac{m_o v\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_o v\prime\frac{dv\prime}{dt\prime}}{\left(1+\frac{v\prime^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{r^2}\frac{dr}{dt\prime} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}.\frac{d\vec{r}}{dt\prime}$$

$$\frac{dE_k}{dt\prime} = \vec{F}'.\vec{v}' = \frac{m_o\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{m_o\vec{v}\prime\frac{d\vec{v}\prime}{dt}}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}.\vec{v}'$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{F}'.\vec{v}' = \frac{m_o\vec{v}.\vec{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{m_o\vec{v}\prime.\vec{a}\prime}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}.\vec{v}' \qquad \vec{F}' = \frac{m_o\vec{a}\prime}{\left(1+\frac{v\prime^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} \qquad 28.20$$

$$\vec{F}' = \frac{m_o}{\left(1+\frac{v\prime^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{\left[\frac{d^2r}{dt\prime^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left(2\frac{dr}{dt\prime}\frac{d\emptyset}{dt\prime} + r\frac{d^2\emptyset}{dt\prime^2}\right)\widehat{\emptyset}\right\} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F}'_{\widehat{\emptyset}} = \left(2\frac{dr}{dt\prime}\frac{d\emptyset}{dt} + r\frac{d^2\emptyset}{dt\prime^2}\right)\widehat{\emptyset} = zero \qquad \frac{dL}{dt\prime} = \frac{d}{dt\prime}\left(r^2\frac{d\emptyset}{dt\prime}\right) = 2\frac{dr}{dt\prime}\frac{d\emptyset}{dt} + r\frac{d^2\emptyset}{dt\prime^2} = zero$$

$$\vec{F}'_{\hat{r}} = \frac{m_o}{\left(1+\frac{v\prime^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2r}{dt\prime^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right]\hat{r} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{m_o}{\left(1+\frac{v\prime^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2r}{dt\prime^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt\prime}\right)^2\right] = -\frac{k}{r^2}$$

$$\frac{d\emptyset}{dt} = \frac{L\prime}{r^2} \qquad \frac{dr}{dt\prime} = -L'\frac{dw}{d\emptyset} \qquad \frac{d^2r}{dt\prime^2} = \frac{-L'^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v\prime^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{-L'^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2} - r\left(\frac{L\prime}{r^2}\right)^2\right] = -\frac{k}{m_o}\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v\prime^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{L'^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + r\left(\frac{L\prime}{r^2}\right)^2\right] = \frac{k}{m_o}\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v\prime^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r}\right) = \frac{k}{m_o L'^2} \qquad A = \frac{k}{m_o c^2} \qquad B = \frac{k}{m_o L'^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v\prime^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(1 - A\frac{1}{r}\right)^3 = 1 - 3A\frac{1}{r} + 3A^2\frac{1}{r^2} - A^3\frac{1}{r^3} \cong 1 - 3A\frac{1}{r} \qquad 3A^2\frac{1}{r^2} - A^3\frac{1}{r^3} \cong zero$$

$$\left(1 - 3A\frac{1}{r}\right)\left(\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r}\right) = B \qquad 28.21$$

$$\left(1 - 3A\frac{1}{r}\right)\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \left(1 - 3A\frac{1}{r}\right)\frac{1}{r} - B = zero$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} - 3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r} - 3A\frac{1}{r^2} - B = zero$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} - 3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}w + w - 3Aw^2 - B = zero$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + w - 3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}w - 3Aw^2 - B = zero \qquad 28.22$$

$w = \frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon D}[1 + \varepsilon cos(\emptyset Q)]$ $\frac{dw}{d\emptyset} = \frac{-Qsen(\emptyset Q)}{D}$ $\frac{d^2w}{d\emptyset^2} = \frac{-Q^2cos(\emptyset Q)}{D}$

$$\frac{-Q^2cos(\emptyset Q)}{D} + \frac{1}{\varepsilon D}[1 + \varepsilon cos(\emptyset Q)] - 3A\frac{-Q^2cos(\emptyset Q)}{D}\frac{1}{\varepsilon D}[1 + \varepsilon cos(\emptyset Q)] - 3A\left\{\frac{1}{\varepsilon D}[1 + \varepsilon cos(\emptyset Q)]\right\}^2 - B = zero$$

$$-Q^2\frac{cos(\emptyset Q)}{D} + \frac{1}{\varepsilon D} + \frac{cos(\emptyset Q)}{D} + 3AQ^2\frac{1}{\varepsilon D}\frac{cos(\emptyset Q)}{D} + 3AQ^2\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2} - \left[\frac{3A}{\varepsilon^2D^2} + \frac{6A}{\varepsilon D}\frac{cos(\emptyset Q)}{D} + 3A\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2}\right] - B = zero$$

$$-Q^2\frac{cos(\emptyset Q)}{D} + \frac{1}{\varepsilon D} + \frac{cos(\emptyset Q)}{D} + 3AQ^2\frac{1}{\varepsilon D}\frac{cos(\emptyset Q)}{D} + 3AQ^2\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2} - \frac{3A}{\varepsilon^2D^2} - \frac{6A}{\varepsilon D}\frac{cos(\emptyset Q)}{D} - 3A\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2} - B = zero$$

$$(3AQ^2 - 3A)\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2} + \left(1 - Q^2 + 3AQ^2\frac{1}{\varepsilon D} - \frac{6A}{\varepsilon D}\right)\frac{cos(\emptyset Q)}{D} + \frac{1}{\varepsilon D} - \frac{3A}{\varepsilon^2D^2} - B = zero$$

$$\left(\frac{3AQ^2}{3A} - \frac{3A}{3A}\right)\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2} + \left(\frac{1}{3A} - \frac{Q^2}{3A} + \frac{3A\ ^2}{3A}\frac{1}{\varepsilon D} - \frac{6A}{3A\varepsilon D}\right)\frac{cos(\emptyset Q)}{D} + \frac{1}{3A\varepsilon D} - \frac{3A}{3A\varepsilon^2D^2} - \frac{B}{3A} = zero$$

$$(Q^2 - 1)\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2} + \left(\frac{1}{3A} - \frac{Q^2}{3A} + Q^2\frac{1}{\varepsilon D} - \frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{cos(\emptyset Q)}{D} + \frac{1}{3A\varepsilon D} - \frac{1}{\varepsilon^2D^2} - \frac{\varepsilon DB}{\varepsilon D3A} = zero$$

$$\varepsilon DB = \frac{\varepsilon Dk}{m_o L'^2} = \frac{\varepsilon DGM_o m_o}{m_o GM_o \varepsilon D} = 1$$

$$(1 - Q^2)\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2} + \left(-\frac{1}{3A} + \frac{Q^2}{3A} - Q^2\frac{1}{\varepsilon D} + \frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{cos(\emptyset Q)}{D} - \frac{1}{3A\varepsilon D} + \frac{1}{\varepsilon^2D^2} + \frac{1}{\varepsilon D3A} = zero$$

$(1 - Q^2)\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2} + \left(-\frac{1}{3A} + \frac{Q^2}{3A} - Q^2\frac{1}{\varepsilon D} + \frac{2}{\varepsilon D}\right)\frac{cos(\emptyset Q)}{D} + \frac{1}{\varepsilon^2D^2} = zero$ $Q^2 = \frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}$ 28.23

$$\left[1 - \left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right)\right]\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2} + \left[-\frac{1}{3A} + \frac{1}{3A}\left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right) - \frac{1}{\varepsilon D}\left(\frac{1-\frac{12A}{\varepsilon D}}{1-\frac{6A}{\varepsilon D}}\right) + \frac{2}{\varepsilon D}\right]\frac{cos(\emptyset Q)}{D} + \frac{1}{\varepsilon^2D^2} = zero$$

$$\left(1 - \frac{6A}{\varepsilon D} - 1 + \frac{12A}{\varepsilon D}\right)\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2} + \left[-\frac{1}{3A}\left(1 - \frac{6A}{\varepsilon D}\right) + \frac{1}{3A}\left(1 - \frac{12A}{\varepsilon D}\right) - \frac{1}{\varepsilon D}\left(1 - \frac{12A}{\varepsilon D}\right) + \frac{2}{\varepsilon D}\left(1 - \frac{6A}{\varepsilon D}\right)\right]\frac{cos(\emptyset Q)}{D} + \frac{1}{\varepsilon^2D^2}\left(1 - \frac{6A}{\varepsilon D}\right) = zero$$

$$\frac{6A}{\varepsilon D}\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2} + \left(-\frac{1}{3A} + \frac{2}{\varepsilon D} + \frac{1}{3A} - \frac{4}{\varepsilon D} - \frac{1}{\varepsilon D} + \frac{12A}{\varepsilon^2D^2} + \frac{2}{\varepsilon D} - \frac{12A}{\varepsilon^2D^2}\right)\frac{cos(\emptyset Q)}{D} + \frac{1}{\varepsilon^2D^2} - \frac{1}{\varepsilon^2D^2}\frac{6A}{\varepsilon D} = zero$$

$$\frac{6A}{\varepsilon D}\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2} + \left(-\frac{1}{\varepsilon D}\right)\frac{cos(\emptyset Q)}{D} + \frac{1}{\varepsilon^2D^2} - \frac{1}{\varepsilon^2D^2}\frac{6A}{\varepsilon D} = zero$$

$$6A\frac{cos^2(\emptyset Q)}{D^2} - \frac{cos(\emptyset Q)}{D} + \frac{1}{\varepsilon D} - \frac{6A}{\varepsilon^2D^2} = zero$$

$$\frac{cos(\emptyset Q)}{D} = \frac{1\pm\sqrt{1-4.6A\left(\frac{1}{\varepsilon D}-\frac{6A}{\varepsilon^2D^2}\right)}}{2.6A}$$

$$\frac{cos(\emptyset Q)}{D} = \frac{1\pm\sqrt{1-\frac{24A}{\varepsilon D}+\frac{14\ \ \ ^2}{\varepsilon^2D^2}}}{2.6A}$$

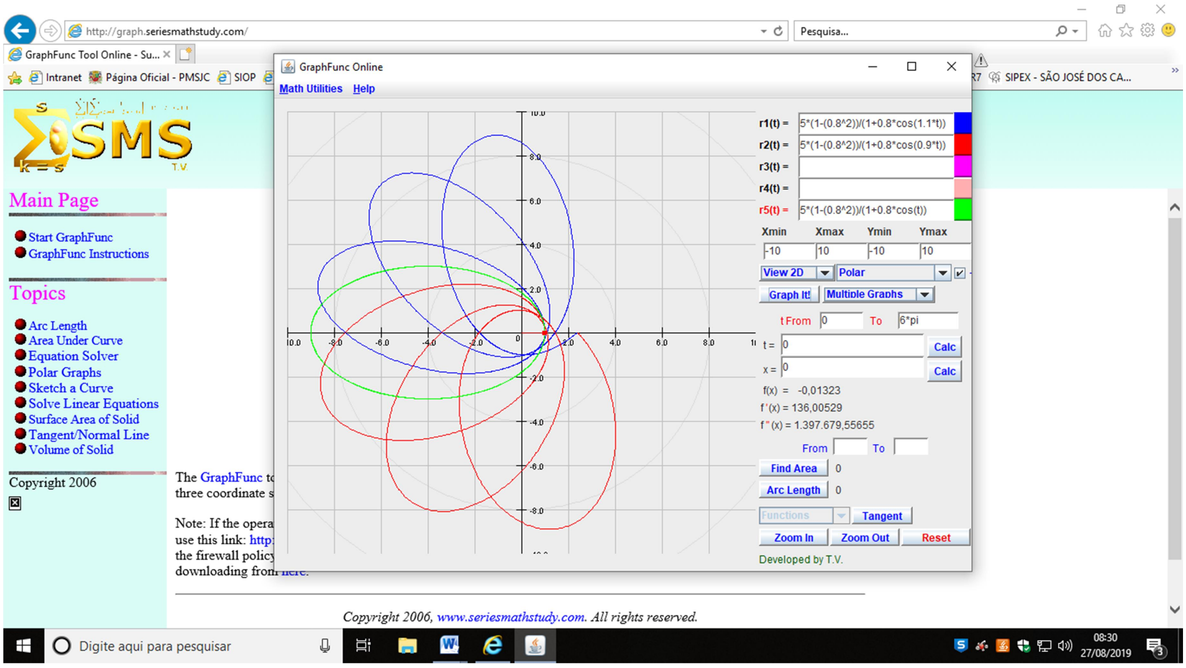
$$\frac{cos(\emptyset Q)}{D} = \frac{1\pm\sqrt{\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)^2}}{12A}$$

$$\frac{cos(\emptyset Q)}{D} = \frac{1\pm\left(1-\frac{12A}{\varepsilon D}\right)}{12A}$$

$$\frac{cos(\emptyset Q)}{D} = \frac{1-1+\frac{12}{\varepsilon D}}{12A} = \frac{1}{\varepsilon D}$$

$\frac{cos(\emptyset Q)}{D} = \frac{1}{\varepsilon D}$ $\varepsilon - \frac{1}{cos(\emptyset Q)} = zero$ 28.24

Para a hipérbole a excentricidade (ε) é definida como $\varepsilon = \frac{1}{cos(\emptyset Q)}$ sendo ($\emptyset$) o ângulo da assíntota.



Os movimentos das elipses terão o foco F’ (esquerdo) na origem do referencial.

Todas as elipses são descrita pela equação $r = r(t) = \frac{\varepsilon D}{1+\varepsilon \quad (tQ)} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \quad (tQ)} = \frac{5(1-0.8^2)}{1+0.8cos(tQ)}$. Nestas o raio vetor de ângulo (tQ), indica a posição do planeta Mercúrio em todas as elipses, o movimento de Mercúrio nas elipses é anti-horário, sendo o valor de Q a causa do avanço ou retrocesso do periélio.

A primeira elipse em azul representa retrocesso do periélio, onde temos $(Q = 1.1)$.

A segunda elipse em vermelho representa o avanço do periélio, nesta temos $(Q = 0.9)$. Nesta elipse o periélio e o afélio avançam no sentido trigonométrico, ou seja, sentido anti-horário que é o mesmo sentido do movimento do planeta na elipse.

A quinta elipse em verde representa uma elipse estacionária $Q = 1$.

§ 29 Energia potencial de Yukawa

Energia potencial gravitacional de Newton $\mathrm{E_{pN}}$

$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$ $\qquad$ $F = |\vec{F}| = \sqrt{\vec{F}.\vec{F}} = \sqrt{\left(-\frac{k}{r^2}\hat{r}\right)\left(-\frac{k}{r^2}\hat{r}\right)} = \sqrt{\left(\frac{k}{r^2}\right)^2 \hat{r}\hat{r}} = \sqrt{\left(\frac{k}{r^2}\right)^2} = \frac{k}{r^2}$

$\vec{F} = -F\hat{r}$ $\qquad$ $\mathrm{E_{pN}} = -\frac{k}{r}$ $\qquad$ $F = \frac{dE_p}{dr} = \frac{k}{r^2}$ $\qquad$ k>zero

$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr}\hat{r} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$

Energia potencial de Yukawa $\mathrm{E_{pY}}$

$\mathrm{E_{pY}} = -k\frac{e^{-ar}}{r} = -kr^{-1}e^{-a}$ $\qquad$ k>zero $\qquad$ $a \geq zero$

Energia potencial do Núcleo E_N

Desmembrando $\mathrm{E_{pY}} = -k\frac{e^{-a}}{r}$ obtemos:

$\mathrm{E_N} = -k\frac{e^{-a}}{r} = \left(-\frac{k}{r}\right)\left(\frac{1}{e^{ar}}\right) = E_{pN}C_Y$ $\qquad$ $C_Y = \frac{1}{e^{ar}}$ $\qquad$ k>zero $\qquad$ $a \geq zero$

$a = zero \rightarrow C_Y = 1 \rightarrow E_N = E_{pN}$ $\qquad$ $r = \infty \rightarrow E_N = zero$

$$\frac{dE_p}{dr}=\frac{d}{dr}(-kr^{-1}e^{-ar})=-k\left\{\left[(-1)r^{-1-1}\frac{dr}{dr}\right]e^{-ar}+(r^{-1})e^{-a}\ \left(-a\frac{dr}{dr}\right)\right\}$$

$$\frac{dE_p}{dr}=\frac{d}{dr}(-kr^{-1}e^{-a}\ )=-k(-r^{-2}e^{-a}\ -ar^{-1}e^{-ar})=k\frac{e^{-ar}}{r^2}+ak\frac{e^{-ar}}{r}$$

$$\frac{dE_p}{dr}=\frac{d}{dr}\left(-k\frac{e^{-ar}}{r}\right)=\left(k\frac{e^{-ar}}{r^2}+ak\frac{e^{-ar}}{r}\right)$$

$$E_{pY}=\int dE_p=\int d\left(-k\frac{e^{-ar}}{r}\right)=\int\left(k\frac{e^{-a}}{r^2}+ak\frac{e^{-ar}}{r}\right)dr=-k\frac{e^{-ar}}{r}+constante$$

$\vec{F}=-\frac{dE_p}{dr}\hat{r}=-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-a}}{r}\right)\hat{r}$ Força de Atração

$\vec{F}=m\vec{a}=\frac{m_o\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}$ 21.51

$\vec{F}'=m\vec{a}'=\frac{m_o\vec{a}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}'}{dt'}$ 21.15

Primeira variante.

$\vec{F}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}=-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-a}}{r}\right)\hat{r}$ 21.51

$$E_k=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}.d\vec{r}=\int-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-a}}{r}\right)\hat{r}.d\vec{r}$$

$$E_k=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}d\vec{v}.\frac{d\vec{r}}{dt}=\int-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)dr$$

$$E_k=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}d\vec{v}.\vec{v}=-\int\left(k\frac{e^{-ar}}{r^2}+ak\frac{e^{-ar}}{r}\right)dr$$

$E_k=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int\frac{m_ovdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-\int\left(k\frac{e^{-ar}}{r^2}+ak\frac{e^{-ar}}{r}\right)dr$ $dE_k=\vec{F}.d\vec{r}=\frac{m_ovdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-k\left(\frac{e^{-a}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)dr$

$$E_k=-m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=-\left(-k\frac{e^{-ar}}{r}\right)+constante$$

$E_k=-m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=k\frac{e^{-ar}}{r}+constante$ $E_k=-m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=k\frac{e^{-ar}}{r}-m_oc^2$

$E_R=-m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-k\frac{e^{-ar}}{r}=-m_oc^2$ $E_R=-m_oc^2\sqrt{1-\frac{(zero)^2}{c^2}}-k\frac{e^{-a\infty}}{\infty}=-m_oc^2$

$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{m_oc^2}{m_oc^2}-\frac{k}{m_oc^2}\frac{e^{-ar}}{r}$ $A=\frac{k}{m_oc^2}$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=1-A\frac{e^{-ar}}{r}$$

$$dE_k=\vec{F}.d\vec{r}=\frac{m_ovdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)dr$$

$$\frac{dE_k}{dt}=\vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{m_ov\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{F}.\vec{v} = \frac{m_o\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}\vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{m_o\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}$$

$$\vec{F} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\emptyset}{dt} + r\frac{d^2\emptyset}{dt^2}\right)\hat{\emptyset}\right\} = -k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}$$

$$\vec{F}_{\hat{\emptyset}} = \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\emptyset}{dt} + r\frac{d^2\emptyset}{dt^2}\right)\hat{\emptyset} = zero \qquad \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\emptyset}{dt}\right) = 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\emptyset}{dt} + r^2\frac{d^2\emptyset}{dt^2} = zero$$

$$\vec{F}_{\hat{r}} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right]\hat{r} = -k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}$$

$$\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right] = -\frac{k}{m_o}\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right] = -\frac{k}{m_o}\left(\frac{e^{-a}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right] = -\frac{k}{m_o}\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\left(1 - A\frac{e^{-ar}}{r}\right)$$

$$\frac{d\emptyset}{dt} = \frac{L}{r^2} \qquad \frac{dr}{dt} = -L\frac{dw}{d\emptyset} \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{-L^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2}$$

$$\left[\frac{-L^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2} - r\left(\frac{L}{r^2}\right)^2\right] = -\frac{k}{m_o}\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\left(1 - A\frac{e^{-a}}{r}\right)$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r} = \frac{k}{m_oL^2}r^2\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\left(1 - A\frac{e^{-ar}}{r}\right) \qquad B = \frac{k}{m_oL^2}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r} = Br^2\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\left(1 - A\frac{e^{-ar}}{r}\right) \qquad B = \frac{k}{m_oL^2}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r} = Be^{-ar}\left(1 - A\frac{e^{-ar}}{r}\right) + aBre^{-ar}\left(1 - A\frac{e^{-ar}}{r}\right)$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r} = Be^{-ar} - ABe^{-ar}\frac{e^{-ar}}{r} + aBre^{-ar} - aABre^{-ar}\frac{e^{-ar}}{r}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r} = Be^{-ar} - AB\frac{e^{-2ar}}{r} + aBre^{-ar} - aABe^{-2ar} \qquad w = \frac{1}{r} \qquad r = w^{-1}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + w = Be^{-aw^{-1}} - ABwe^{-2aw^{-1}} + aBw^{-1}e^{-aw^{-1}} - aABe^{-2aw^{-1}}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + w = Be^{-aw^{-1}} + aBw^{-1}e^{-aw^{-1}} - ABwe^{-2aw^{-1}} - aABe^{-2aw^{-1}}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + w = (1 + aw^{-1})Be^{-aw^{-1}} - (w + a)ABe^{-2aw^{-1}}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + w = \left[(1 + aw^{-1}) - (w + a)Ae^{-aw^{-1}}\right]Be^{-aw^{-1}}$$

$$r = \frac{1}{Q\cos(\emptyset)} \qquad w = \frac{1}{r} = Q\cos(\emptyset) \qquad \frac{dw}{d\emptyset} = -Q\mathrm{sen}(\emptyset) \qquad \frac{d^2w}{d\emptyset^2} = -Q\cos(\emptyset)$$

$$-Q\cos(\emptyset) + Q\cos(\emptyset) = \left[(1 + aw^{-1}) - (w + a)Ae^{-aw^{-1}}\right]Be^{-aw^{-1}}$$

$$\mathrm{zero} = \left[(1 + aw^{-1}) - (w + a)Ae^{-aw^{-1}}\right]Be^{-aw^{-1}}$$

$(1+\mathrm{aw}^{-1})-(\mathrm{w}+\mathrm{a})\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}=zero$ $\quad$ $\mathrm{w}=\frac{1}{r}=Q\cos(\emptyset)$ $\quad$ $r=\mathrm{w}^{-1}=\frac{1}{Q\cos(\emptyset)}$

$$\left[1+\frac{\mathrm{a}}{Q\mathrm{co}\ (\emptyset)}\right]-[Q\cos(\emptyset)+\mathrm{a}]\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}=zero$$

$$Q\cos(\emptyset)\left(1+\frac{\mathrm{a}}{Q\cos(\emptyset)}\right)-Q\cos(\emptyset)[Q\cos(\emptyset)+\mathrm{a}]\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}=zero$$

$$Q\cos(\emptyset)+\mathrm{a}-Q^2\cos^2(\emptyset)\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}-Q\cos(\emptyset)\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}=zero$$

$$-Q\cos(\emptyset)-\mathrm{a}+Q^2\cos^2(\emptyset)\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}+Q\cos(\emptyset)\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}=zero$$

$$Q^2\cos^2(\emptyset)\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}-Q\cos(\emptyset)+Q\cos(\emptyset)\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}-a=zero$$

$$Q^2\cos^2(\emptyset)\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}-Q\cos(\emptyset)\left(1-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}\right)-a=zero$$

$$Q^2\cos^2(\emptyset)\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}-Q\cos(\emptyset)\left(1-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}\right)-a=zero$$

$$Q\cos(\emptyset)=\frac{1-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}\pm\sqrt{\left(1-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}\right)^2-4\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}(-a)}}{2\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}$$

$$Q\cos(\emptyset)=\frac{1-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}\pm\sqrt{1-2\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}+\mathrm{a}^2\mathrm{A}^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{aw}^{-1}}+4a\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}}{2\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}$$

$$Q\cos(\emptyset)=\frac{1-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}\pm\sqrt{1+2\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}+\mathrm{a}^2\mathrm{A}^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{aw}^{-1}}}}{2\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}$$

$$Q\cos(\emptyset)=\frac{1-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}\pm\sqrt{\left(1+\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}\right)^2}}{2\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}$$

$$Q\cos(\emptyset)=\frac{1-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}\pm\left(1+\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}\right)}{2\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}$$

$$Q\cos(\emptyset)=\frac{1-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}-1-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}{2\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}$$

$$Q\cos(\emptyset)=\frac{-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}{2\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}$$

$\mathrm{w}=\frac{1}{r}=Q\cos(\emptyset)=\frac{-\mathrm{a}-\mathrm{a}}{2}=\frac{-2\mathrm{a}}{2}=-a$ $\quad$ $r=\frac{-1}{a}$ $\quad$ $\mathrm{E}_p=\mathrm{constante}$

$$\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{dr}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(-\mathrm{k}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{r}\right)=\left(k\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}^2}+\mathrm{ak}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}}\right)=zero$$

$k\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}^2}+\mathrm{ak}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}}=zero$ $\quad$ $\frac{1}{\mathrm{r}}=-\mathrm{a}$ $\quad$ $r=\frac{-1}{a}$ $\quad$ $\mathrm{E}_p=\mathrm{constante}$

$$\mathrm{E_{pY}}=-\mathrm{k}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{r}=-\mathrm{kr}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}=-\mathrm{k}(-a)\mathrm{e}^{-\mathrm{a}\frac{-1}{a}}=\mathrm{ake}$$

$$Q\cos(\emptyset)=\frac{1-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}\pm\left(1+\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}\right)}{2\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}$$

$$Q\cos(\emptyset)=\frac{1-\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}+1+\mathrm{aAe}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}{2\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}$$

$$\mathrm{w}=\frac{1}{r}=Q\cos(\emptyset)=\frac{2}{2\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}=\frac{1}{\mathrm{Ae}^{-\mathrm{aw}^{-1}}}$$

Segunda variante.

$$\vec{F}' = \frac{m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}'}{dt'} = -k\left(\frac{e^{-a}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r} \tag{21.15}$$

$$E_k = \int \vec{F}'.d\vec{r} = \int \frac{m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}'}{dt'}.d\vec{r} = \int -k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}.d\vec{r}$$

$$E_k = \int \vec{F}'.d\vec{r} = \int \frac{m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}d\vec{v}'\frac{d\vec{r}}{dt'} = \int -k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)dr$$

$$E_k = \int \vec{F}'.d\vec{r} = \int \frac{m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}d\vec{v}'.\vec{v'} = -\int\left(k\frac{e^{-ar}}{r^2} + ak\frac{e^{-ar}}{r}\right)dr$$

$$E_k = \int \vec{F}'.d\vec{r} = \int \frac{m_o v' dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = -\int\left(k\frac{e^{-a}}{r^2} + ak\frac{e^{-ar}}{r}\right)dr \qquad dE_k = \vec{F}'.d\vec{r} = \frac{m_o v' dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = -k\left(\frac{e^{-a}}{r^2} + a\frac{e^{-a}}{r}\right)dr$$

$$E_k = m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = -\left(-k\frac{e^{-ar}}{r}\right) + constante$$

$$E_k = m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = k\frac{e^{-ar}}{r} + constante \qquad E_k = m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = k\frac{e^{-a}}{r} + m_o c^2$$

$$E_R = m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - k\frac{e^{-ar}}{r} = m_o c^2 \qquad E_R = m_o c^2\sqrt{1+\frac{(zero)^2}{c^2}} - k\frac{e^{-a}}{\infty} = m_o c^2$$

$$\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = \frac{m_o c^2}{m_o c^2} + \frac{k}{m_o c^2}\frac{e^{-ar}}{r} \qquad A = \frac{k}{m_o c^2}$$

$$\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = 1 + A\frac{e^{-ar}}{r}$$

$$dE_k = \vec{F}'.d\vec{r} = \frac{m_o v' dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = -k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)dr$$

$$\frac{dE_k}{dt'} = \vec{F'}.\frac{d\vec{r}}{dt'} = \frac{m_o v'\frac{dv'}{dt'}}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = -k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}\frac{d\vec{r}}{dt'}$$

$$\frac{dE_k}{dt'} = \vec{F}'.\vec{v}' = \frac{m_o\vec{v}'\frac{d\vec{v}'}{dt'}}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = -k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}\vec{v}'$$

$$\vec{F}' = \frac{m_o\vec{a}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = -k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}$$

$$\vec{F}' = \frac{m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\left\{\left[\frac{d^2r}{dt'^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left(2\frac{dr}{dt'}\frac{d\emptyset}{dt} + r\frac{d^2\emptyset}{dt'^2}\right)\hat{\emptyset}\right\} = -k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}$$

$$\vec{F'}_{\hat{\emptyset}} = \left(2\frac{dr}{dt'}\frac{d\emptyset}{dt'} + r\frac{d^2\emptyset}{dt'^2}\right)\hat{\emptyset} = zero \qquad \frac{dL}{dt'} = \frac{d}{dt'}\left(r^2\frac{d\emptyset}{dt'}\right) = 2r\frac{dr}{dt'}\frac{d\emptyset}{dt'} + r^2\frac{d^2\emptyset}{dt'^2} = zero$$

$$\vec{F}'_{\hat{r}} = \frac{m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\left[\frac{d^2r}{dt'^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt'}\right)^2\right]\hat{r} = -k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}$$

$$\left[\frac{d^2r}{dt'^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right] = -\frac{k}{m_o}\left(\frac{e^{-ar}}{r^2} + a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}$$

$$\left[\frac{d^2r}{dt'^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt}\right)^2\right] = -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m_o}}\left(\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r^2}} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r}}\right)\sqrt{1 + \frac{\mathrm{v'^2}}{\mathrm{c^2}}}$$

$$\left[\frac{d^2r}{dt'^2} - r\left(\frac{d\emptyset}{dt'}\right)^2\right] = -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m_o}}\left(\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r^2}} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e^{-a}}}{\mathrm{r}}\right)\left(1 + \mathrm{A}\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r}}\right)$$

$$\frac{d\emptyset}{dt'} = \frac{L'}{r^2} \qquad \frac{dr}{dt'} = -\mathrm{L}'\frac{dw}{d\emptyset} \qquad \frac{d^2r}{dt'^2} = \frac{-\mathrm{L}^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2}$$

$$\left[\frac{-\mathrm{L'^2}}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2} - r\left(\frac{L'}{r^2}\right)^2\right] = -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m_o}}\left(\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r^2}} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e^{-a}}}{\mathrm{r}}\right)\left(1 + \mathrm{A}\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r}}\right)$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m_o L'^2}}r^2\left(\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r^2}} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r}}\right)\left(1 + \mathrm{A}\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r}}\right) \qquad B = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m_o L'^2}}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r} = \mathrm{B}r^2\left(\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r^2}} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e^{-a}}}{\mathrm{r}}\right)\left(1 + \mathrm{A}\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r}}\right) \qquad B = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m_o L'^2}}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r} = \mathrm{Be^{-a}}\ \left(1 + \mathrm{A}\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r}}\right) + \mathrm{aBre^{-ar}}\left(1 + \mathrm{A}\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r}}\right)$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r} = \mathrm{Be^{-a}}\ + \mathrm{ABe^{-ar}}\frac{\mathrm{e^{-ar}}}{\mathrm{r}} + \mathrm{aBre^{-ar}} + \mathrm{aABre^{-a}}\ \frac{\mathrm{e^{-a}}}{\mathrm{r}}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r} = \mathrm{Be^{-ar}} + \mathrm{AB}\frac{\mathrm{e^{-2ar}}}{\mathrm{r}} + \mathrm{aBre^{-ar}} + \mathrm{aABe^{-2ar}} \qquad \mathrm{w} = \frac{1}{r} \qquad r = \mathrm{w^{-1}}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \mathrm{w} = \mathrm{Be^{-aw^{-1}}} + \mathrm{ABwe^{-2a\ \ ^{-1}}} + \mathrm{aBw^{-1}e^{-aw^{-1}}} + \mathrm{aABe^{-2a\ \ ^{-1}}}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \mathrm{w} = \mathrm{Be^{-aw^{-1}}} + \mathrm{aBw^{-1}e^{-aw^{-1}}} + \mathrm{ABwe^{-2aw^{-1}}} + \mathrm{aABe^{-2aw^{-1}}}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \mathrm{w} = (1 + \mathrm{aw^{-1}})\mathrm{Be^{-aw^{-1}}} + (\mathrm{w} + \mathrm{a})\mathrm{ABe^{-2aw^{-1}}}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \mathrm{w} = \left[(1 + \mathrm{aw^{-1}}) + (\mathrm{w} + \mathrm{a})\mathrm{Ae^{-aw^{-1}}}\right]\mathrm{Be^{-aw^{-1}}}$$

$$\mathrm{r} = \frac{1}{Q\cos(\emptyset)} \qquad \mathrm{w} = \frac{1}{r} = Q\cos(\emptyset) \qquad \frac{\mathrm{dw}}{d\emptyset} = -Q\mathrm{sen}(\emptyset) \qquad \frac{\mathrm{d^2w}}{d\emptyset^2} = -Q\cos(\emptyset)$$

$$-Q\cos(\emptyset) + Q\cos(\emptyset) = \left[(1 + \mathrm{aw^{-1}}) + (\mathrm{w} + \mathrm{a})\mathrm{Ae^{-aw^{-1}}}\right]\mathrm{Be^{-aw^{-1}}}$$

$$\mathrm{zero} = \left[(1 + \mathrm{aw^{-1}}) + (\mathrm{w} + \mathrm{a})\mathrm{Ae^{-aw^{-1}}}\right]\mathrm{Be^{-aw^{-1}}}$$

$$(1 + \mathrm{aw^{-1}}) + (\mathrm{w} + \mathrm{a})\mathrm{Ae^{-aw^{-1}}} = zero \qquad \mathrm{w} = \frac{1}{r} = Q\cos(\emptyset) \quad r = \mathrm{w^{-1}} = \frac{1}{Q\cos(\emptyset)}$$

$$\left[1 + \frac{\mathrm{a}}{Q\cos(\emptyset)}\right] + [Q\cos(\emptyset) + \mathrm{a}]\mathrm{Ae^{-aw^{-1}}} = zero$$

$$Q\cos(\emptyset)\left(1 + \frac{\mathrm{a}}{Q\cos(\emptyset)}\right) + Q\cos(\emptyset)[Q\cos(\emptyset) + \mathrm{a}]\mathrm{Ae^{-aw^{-1}}} = zero$$

$$Q\cos(\emptyset) + \mathrm{a} + Q^2\cos^2(\emptyset)\mathrm{Ae^{-aw^{-1}}} + Q\cos(\emptyset)\mathrm{aAe^{-aw^{-1}}} = zero$$

$$Q^2\cos^2(\emptyset)\mathrm{Ae^{-aw^{-1}}} + Q\cos(\emptyset) + Q\cos(\emptyset)\mathrm{aAe^{-aw^{-1}}} + a = zero$$

$$Q^2\cos^2(\emptyset)\mathrm{Ae^{-aw^{-1}}} + Q\cos(\emptyset)\left(1 + \mathrm{aAe^{-aw^{-1}}}\right) + a = zero$$

$$Q\cos(\emptyset) = \frac{-\left(1 + \mathrm{aAe^{-aw^{-1}}}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \mathrm{aAe^{-aw^{-1}}}\right)^2 - 4\mathrm{Ae^{-aw^{-1}}}(a)}}{2\mathrm{Ae^{-aw^{-1}}}}$$

$$Q\cos(\emptyset) = \frac{-\left(1 + \mathrm{aAe^{-aw^{-1}}}\right) \pm \sqrt{1 + 2\mathrm{aAe^{-aw^{-1}}} + \mathrm{a^2A^2e^{-2aw^{-1}}} - 4a\mathrm{Ae^{-aw^{-1}}}}}{2\mathrm{Ae^{-aw^{-1}}}}$$

$$Q\cos(\emptyset)=\frac{-\left(1-aAe^{-aw^{-1}}\right)\pm\sqrt{1-2aAe^{-aw^{-1}}+a^2A^2e^{-2aw^{-1}}}}{2Ae^{-aw^{-1}}}$$

$$Q\cos(\emptyset)=\frac{-\left(1-aAe^{-aw^{-1}}\right)\pm\sqrt{\left(1-aAe^{-aw^{-1}}\right)^2}}{2Ae^{-aw^{-1}}}$$

$$Q\cos(\emptyset)=\frac{-\left(1-aAe^{-aw^{-1}}\right)\pm\left(1-aAe^{-aw^{-1}}\right)}{2Ae^{-aw^{-1}}}$$

$$w=\frac{1}{r}=Q\cos(\emptyset)=\frac{-1+aAe^{-aw^{-1}}+1-aAe^{-aw^{-1}}}{2Ae^{-aw^{-1}}}=zero$$

$$Q\cos(\emptyset)=\frac{-\left(1-aAe^{-aw^{-1}}\right)\pm\left(1-aAe^{-aw^{-1}}\right)}{2Ae^{-aw^{-1}}}$$

$Q\cos(\emptyset)=\frac{-1+aA\ \ e^{-aw^{-1}}-1+aAe^{-aw^{-1}}}{2A\ \ e^{-aw^{-1}}}$ $\qquad$ $w=\frac{1}{r}=Q\cos(\emptyset)$ $\quad$ $r=w^{-1}=\frac{1}{Q\cos(\emptyset)}$

$$w=\frac{1}{r}=Q\cos(\emptyset)=\frac{-2+2aAe^{-aw^{-1}}}{2Ae^{-aw^{-1}}}=\frac{-1+aAe^{-aw^{-1}}}{Ae^{-aw^{-1}}}=a-\frac{1}{Ae^{-aw^{-1}}}$$

§ 29 Energia Potencial de Yukawa "Continuação"

Energia potencial gravitacional de Newton E_{pN}

$\vec{F}=-\frac{k}{r^2}\hat{r}$ $\qquad$ $F=\left|\vec{F}\right|=\sqrt{\vec{F}.\vec{F}}=\sqrt{\left(-\frac{k}{r^2}\hat{r}\right)\left(-\frac{k}{r^2}\hat{r}\right)}=\sqrt{\left(\frac{k}{r^2}\right)^2\hat{r}\hat{r}}=\sqrt{\left(\frac{k}{r^2}\right)^2}=\frac{k}{r^2}$

$\vec{F}=-F\hat{r}$ $\qquad$ $E_p=-\frac{k}{r}$ $\qquad$ $F=\frac{dE_p}{dr}=\frac{k}{r^2}$ $\qquad$ k>zero

$$\vec{F}=-\frac{dE_p}{dr}\hat{r}=-\frac{k}{r^2}\hat{r}$$

Energia potencial de Yukawa E_{pY}

$E_{pY}=-k\frac{e^{-ar}}{r}=-kr^{-1}e^{-ar}$ $\qquad$ k>zero $\qquad$ a>zero

$$\frac{dE_p}{dr}=\frac{d}{dr}\left(-kr^{-1}e^{-ar}\right)=-k\left\{\left[(-1)r^{-1-1}\frac{dr}{dr}\right]e^{-ar}+(r^{-1})e^{-ar}\left(-a\frac{dr}{dr}\right)\right\}$$

$$\frac{dE_p}{dr}=\frac{d}{dr}\left(-kr^{-1}e^{-ar}\right)=-k\left(-r^{-2}e^{-ar}-ar^{-1}e^{-ar}\right)=k\left(r^{-2}e^{-ar}+ar^{-1}e^{-ar}\right)=k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)$$

$$\frac{dE_p}{dr}=\frac{d}{dr}\left(-k\frac{e^{-a}}{r}\right)=k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)$$

$$E_p=\int dE_p=k\int d\left(-\frac{e^{-ar}}{r}\right)=k\int\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)dr=-k\frac{e^{-ar}}{r}$$

$\vec{F}=-\frac{dE_p}{dr}\hat{r}=-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}$ $\qquad$ Força de atração

$$\vec{F}=\frac{m_o\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\vec{F}'=\frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'}-v'\frac{dv'}{dt}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right] \qquad 28.16$$

$$\vec{F}=\frac{m_o\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\vec{F}'=\frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'}-v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right]=-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}$$

$$E_k=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int\vec{F}'.d\vec{r}=\int-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}.d\vec{r}$$

$$E_k=\int\frac{m_o\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.d\vec{r}=\int\frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'}-v'\frac{dv'}{dt'}\frac{\vec{v}'}{c^2}\right].d\vec{r}=\int-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-a}}{r}\right)\hat{r}.d\vec{r}$$

$$E_k=\int\frac{m_o v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\int\frac{m_o v' d}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\int-k\left(\frac{e^{-a}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)dr$$

$$dE_k=\vec{F}'.d\vec{r}=\frac{m_o v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_o v' dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-a}}{r}\right)dr \qquad 28.17$$

$$E_k=-m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=-\frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=-\left(-k\frac{e^{-ar}}{r}\right)+constante \qquad 28.18$$

$$E_R=-m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-k\frac{e^{-ar}}{r}=-m_o c^2 \qquad 28.18$$

$$E_R=-\frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}-k\frac{e^{-ar}}{r}=-m_o c^2 \qquad \frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(1-\frac{k}{m_o c^2}\frac{e^{-ar}}{r}\right)^3=\left(1-A\frac{e^{-ar}}{r}\right)^3 \qquad 28.19$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(1-A\frac{e^{-ar}}{r}\right)^3 \qquad A=\frac{k}{m_o c^2} \qquad 28.19$$

$$\frac{dE_k}{dt'}=\vec{F}'.\frac{d\vec{r}}{dt'}=\frac{m_o v\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_o v'\frac{dv'}{dt'}}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\frac{dr}{dt'}=-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}.\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{dE_k}{dt'}=\vec{F}'.\vec{v}'=\frac{m_o\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}=\frac{m_o\vec{v}'\frac{d\vec{v}'}{dt}}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}.\vec{v}'$$

$$\frac{dE_k}{dt}=\vec{F}'.\vec{v}'=\frac{m_o\vec{v}.\vec{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}=\frac{m_o\vec{v}'.\vec{a}'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-k\left(\frac{e^{-a}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}.\vec{v}' \qquad 28.20$$

$$\vec{F}'=\frac{m_o\vec{a}'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r} \qquad 28.20$$

$$\vec{F}'=\frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{\left[\frac{d^2r}{dt'^2}-r\left(\frac{d\emptyset}{dt'}\right)^2\right]\hat{r}+\left(2\frac{dr}{dt'}\frac{d\emptyset}{dt}+r\frac{d^2\emptyset}{dt'^2}\right)\hat{\emptyset}\right\}=-k\left(\frac{e^{-ar}}{r^2}+a\frac{e^{-ar}}{r}\right)\hat{r}$$

$$\vec{F'}_{\widehat{\emptyset}} = \left(2\frac{\mathrm{dr}}{dt\prime}\frac{d\emptyset}{dt\prime} + \mathrm{r}\frac{d^2\emptyset}{dt\prime^2}\right)\widehat{\emptyset} = zero \qquad \frac{dL\prime}{dt} = \frac{d}{dt\prime}\left(r^2\frac{d\emptyset}{dt\prime}\right) = 2r\frac{\mathrm{dr}}{dt}\frac{d\emptyset}{dt\prime} + \mathrm{r}^2\frac{d^2\emptyset}{dt\prime^2} = zero$$

$$\vec{F'}_{\hat{r}} = \frac{m_o}{\left(1+\frac{\mathrm{v}\prime^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2\mathrm{r}}{dt\prime^2} - \mathrm{r}\left(\frac{d\emptyset}{dt\prime}\right)^2\right]\hat{r} = -\mathrm{k}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}^2} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}}\right)\hat{r}$$

$$\frac{m_o}{\left(1+\frac{\mathrm{v}\prime^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2\mathrm{r}}{dt\prime^2} - \mathrm{r}\left(\frac{d\emptyset}{dt\prime}\right)^2\right] = -\mathrm{k}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{a}}}{\mathrm{r}^2} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}}\right)$$

$$\frac{d\emptyset}{dt} = \frac{L\prime}{r^2} \qquad \frac{dr}{dt\prime} = -\mathrm{L}'\frac{dw}{d\emptyset} \qquad \frac{d^2r}{dt\prime^2} = \frac{-\mathrm{L}'^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{v}\prime^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{-L\prime^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2} - \mathrm{r}\left(\frac{L\prime}{r^2}\right)^2\right] = -\frac{k}{m_o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}^2} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}}\right)$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{v}\prime^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{L\prime^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \mathrm{r}\left(\frac{L\prime}{r^2}\right)^2\right] = \frac{k}{m_o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}^2} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}}\right)$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{v}\prime^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{L\prime^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{L\prime^2}{r^3}\right] = \frac{k}{m_o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}^2} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}}\right)$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{v}\prime^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r}\right] = \frac{k}{m_oL\prime^2}r^2\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{a}}}{\mathrm{r}^2} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}}\right) \qquad B = \frac{k}{m_oL\prime^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{v}\prime^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r}\right) = Br^2\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}^2} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}}\right) \qquad B = \frac{k}{m_oL\prime^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{v}\prime^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(1 - A\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{a}}}{\mathrm{r}}\right)^3 = 1 - 3A\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}} + 3A^2\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{a}}}{r^2} - A^3\frac{\mathrm{e}^{-3\mathrm{ar}}}{r^3} \cong 1 - 3A\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{a}}}{r}$$

$$3A^2\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{ar}}}{r^2} - A^3\frac{\mathrm{e}^{-3\mathrm{ar}}}{r^3} \cong zero \qquad A = \frac{k}{m_oc^2}$$

$$\left(1 - 3A\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{r}\right)\left(\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \frac{1}{r}\right) = Br^2\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}^2} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}}\right) \tag{28.21}$$

$$\left(1 - 3A\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{r}\right)\frac{d^2w}{d\emptyset^2} + \left(1 - 3A\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{r}\right)\frac{1}{r} = Br^2\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}^2} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}}\right)$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} - 3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{r} + \frac{1}{r} - 3A\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{r^2} = Br^2\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}^2} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{\mathrm{r}}\right)$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2} - 3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{r} + \frac{1}{r} - 3A\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{a}}}{r^2} = B\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}} + r\mathrm{aBe}^{-\mathrm{ar}}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2}\frac{1}{r} - 3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{r^2} + \frac{1}{r^2} - 3A\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}}{r^3} = B\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{a}}}{r} + \mathrm{aBe}^{-\mathrm{ar}} \qquad w = \frac{1}{r}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2}w - 3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}w^2 + w^2 - 3A\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}w^3 = B\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}\mathrm{w} + \mathrm{aBe}^{-\mathrm{a}}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2}w + w^2 = 3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}w^2 + 3A\mathrm{e}^{-\mathrm{a}}\ w^3 + B\mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}\mathrm{w} + \mathrm{aBe}^{-\mathrm{ar}}$$

$$\frac{d^2w}{d\emptyset^2}w + w^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}\left(3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}w^2 + 3Aw^3 + B\mathrm{w} + \mathrm{aB}\right) \qquad 28.22$$

$w = \frac{1}{r} = xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}$ $\qquad$ $\frac{dw}{d\emptyset} = ixe^{i\emptyset} - iye^{-i\emptyset}$ $\qquad$ $\frac{d^2w}{d\emptyset^2} = -xe^{i\emptyset} - ye^{-i\emptyset}$ $\qquad$ $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$

$$\left(-xe^{i\emptyset} - ye^{-i\emptyset}\right)\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right) + \left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right)^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{ar}}\left(3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}w^2 + 3Aw^3 + B\mathrm{w} + \mathrm{aB}\right)$$

$$\left(-xe^{i\emptyset} - ye^{-i\emptyset}\right)\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right) = \left[\left(-xe^{i\emptyset}\right)\left(xe^{i\emptyset}\right) + \left(-xe^{i\emptyset}\right)\left(ye^{-i\emptyset}\right) + \left(-ye^{-i\emptyset}\right)\left(xe^{i\emptyset}\right) + \left(-ye^{-i\emptyset}\right)\left(ye^{-i\emptyset}\right)\right]$$
$$= \left(-x^2e^{2i\emptyset} - xy - yx - y^2e^{-2i\emptyset}\right) = -\left(x^2e^{2i\emptyset} + 2xy + y^2e^{-2i\emptyset}\right) = -\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right)^2$$

$$-\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right)^2 + \left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right)^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{a}}\ \left(3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}w^2 + 3Aw^3 + B\mathrm{w} + \mathrm{aB}\right)$$

$$zero = \mathrm{e}^{-\mathrm{a}}\ \left(3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}w^2 + 3Aw^3 + B\mathrm{w} + \mathrm{aB}\right)$$

$$3A\frac{d^2w}{d\emptyset^2}w^2 + 3Aw^3 + B\mathrm{w} + \mathrm{aB} = \mathrm{zero}$$

$$3A\left(-xe^{i\emptyset} - ye^{-i\emptyset}\right)\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right)^2 + 3A\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right)^3 + B\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right) + \mathrm{aB} = \mathrm{zero}$$

$$3A\left(-xe^{i\emptyset} - ye^{-i\emptyset}\right)\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right)^2 = -3A\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right)\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right)^2 = -3A\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right)^3$$

$$-3A\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right)^3 + 3A\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right)^3 + B\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right) + \mathrm{aB} = \mathrm{zero}$$

$B\left(xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset}\right) + \mathrm{aB} = \mathrm{zero}$ $\qquad$ $xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset} + \mathrm{a} = \mathrm{zero}$

$$w = \frac{1}{r} = xe^{i\emptyset} + ye^{-i\emptyset} = -\mathrm{a}$$

No §28 Cálculo simplificado do avanço do Periélio de Mercúrio obtivemos:

$$E_k = \int \frac{m_o v' dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \int \frac{m_o v dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int -\frac{k}{r^2} dr \qquad dE_k = \vec{F}.d\vec{r} = \frac{m_o v' dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{m_o v dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{r^2} dr \qquad 28.08$$

$$E_k = m_o c^2 \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{k}{r} + \text{constant} \qquad E_R = m_o c^2 \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - \frac{k}{r} = m_o c^2 \qquad 28.09$$

$$E_R = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{k}{r} = m_o c^2 \qquad \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(1 + \frac{k}{m_o c^2}\frac{1}{r}\right)^3 = \left(1 + A\frac{1}{r}\right)^3 \qquad 28.10$$

Nesta primeira variante, a energia cinética relativística é maior que a energia inercial $\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > m_o c^2$. Isso faz com que o periélio de Mercúrio retroceda. O planeta parece mais pesado devido o movimento.

$$E_k = \int \frac{m_o v' dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \int \frac{m_o v dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int -\frac{k}{r^2} dr \qquad 28.08$$

$$E_k = \int_{v'=zer}^{v'} \frac{m_o v' dv'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \int_{v=zer}^{v} \frac{m_o v dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_{r=\infty}^{r} -\frac{k}{r^2} dr$$

$$E_k = m_o c^2 \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\Bigg|_{v'=zero}^{v'} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Bigg|_{v=zero}^{v} = \frac{k}{r}\Big|_{r=\infty}^{r}$$

$$E_k = m_o c^2 \sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}} - m_o c^2 \sqrt{1+\frac{(zero)^2}{c^2}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{(zero)^2}{c^2}}} = \frac{k}{r} - \frac{k}{\infty}$$

$$E_k = m_o c^2 \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - m_o c^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2 = \frac{k}{r} \qquad m_o c^2 \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} \geq m_o c^2 \qquad \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq m_o c^2 \qquad 30.1$$

Definindo a energia potencial como: $E_p = -\frac{k}{r}$ 30.2

Aplicando 2 em 1 obtemos: $E_k = m_o c^2 \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - m_o c^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2 = -E_p$ 30.3

Em 3 nos temos o principio de conservação da energia escrito como: $E_k + E_p = zero$ 30.4

E temos em 1 a energia cinética escrita como:

$$E_k = m_o c^2 \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - m_o c^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2 \qquad 30.5$$

Em 1 a menor energia do sistema é a energia inercial de repouso $E_0 = m_o c^2$ 30.6

Em 1 a maior energia do sistema é $E = m_o c^2 \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 30.7

Agora definindo:

$$p = \frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_o v' \qquad vp = \frac{m_o v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_o v v' \qquad T' = m_o c^2 \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} \quad T = -m_o c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad 30.8$$

Com 7 e 8 deduzimos:

$$E = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2} = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = vp - T \qquad 30.9$$

Se em 9 $m_o = \text{zero}$ então: $E = cp.$ 30.10

Aplicando 8 e 9 em 7 resulta a maior energia do sistema escrita como:

$E = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2} = T' = vp - T$ nesta temos: $vp = T' + T$ 30.7b

Com 8 e 9 podemos escrever 3 na forma:

$$E_k = m_oc^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - m_oc^2 = \frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_oc^2 = -E_p \qquad 30.3b$$

$$E_k = T' - E_0 = vp - T - E_0 = -E_p \qquad 30.3c$$

A partir de 3c podemos definir as energias inerciais de repouso $E_0' = m_o$ e $E_0 = m_o$ na forma:

$E_0' = T' + E_p = m_oc^2$ e $E_0 = vp - T + E_p = m_oc^2.$ 30.11

Definindo a Lagrangeana como: $L = T - E_p = -m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{k}{r}$ 30.12

Esta Lagrangeana está de acordo com o § 24: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$

Aplicando 12 em 11 obtemos: $E_0' = T' + E_p = m_oc^2$ e $E_0 = vp - L = m_oc^2$ 30.13

No §28 cálculo simplificado do avanço do periélio de Mercúrio obtivemos:

$E_k = \int \frac{m_ovdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \int \frac{m_ov'dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int -\frac{k}{r^2}dr$ $dE_k = \vec{F}'.d\vec{r} = \frac{m_ovdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_ov'dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{r^2}dr$ 28.17

$E_k = -m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -\frac{m_oc^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{k}{r} + \text{constant}$ $E_R = -m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{k}{r} = -m_oc^2$ 28.18

$E_R = -\frac{m_oc^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} - \frac{k}{r} = -m_oc^2$ $\frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(1 - \frac{k}{m_oc^2}\frac{1}{r}\right)^3 = \left(1 - A\frac{1}{r}\right)^3$ 28.19

Nesta segunda variante a energia cinética relativística é menor que a energia inercial $\frac{m_oc^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} < m_oc^2$. Isso causa o avanço do periélio de Mercúrio. O planeta realmente está mais leve devido o movimento.

$$E_k = \int \frac{m_ovdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \int \frac{m_ov'dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int -\frac{k}{r^2}dr \qquad 28.17$$

$$E_k = \int_{v=zer}^{v} \frac{m_ovdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \int_{v'=zero}^{v'} \frac{m_ov'dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_{r=\infty}^{r} -\frac{k}{r^2}dr$$

$$E_k = -m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Bigg|_{v=zer}^{v} = -\frac{m_oc^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\Bigg|_{v'=zero}^{v'} = \frac{k}{r}\Bigg|_{r=\infty}^{r}$$

$$E_k = -m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \left(-m_oc^2\sqrt{1-\frac{(\text{zero})^2}{c^2}}\right) = -\frac{m_oc^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} - \left(-\frac{m_oc^2}{\sqrt{1+\frac{(\text{zero})^2}{c^2}}}\right) = \frac{k}{r} - \frac{k}{\infty}$$

$$E_k = -m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - (-m_o c^2) = -\frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} - (-m_o c^2) = \frac{k}{r}$$

$$E_k = -m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + m_o c^2 = -\frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} + m_o c^2 = \frac{k}{r}$$

$$E_k = m_o c^2 - m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_o c^2 - \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{k}{r} \qquad m_o c^2 \geq m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad m_o c^2 \geq \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad 30.14$$

Aplicando em 14 a definição 2 de energia potencial $E_p = -\frac{k}{r}$.

Nos obtemos: $E_k = m_o c^2 - m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_o c^2 - \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = -E_p$ 30.15

Em 15 nos temos o principio de conservação da energia escrito como $E_k + E_p = \text{zero}$.

Sendo em 15 a energia cinética igual a:

$$E_k = m_o c^2 - m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_o c^2 - \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad 30.16$$

Em 15 a maior energia do sistema é a energia inercial de repouso $E_0 = m_o c^2$ 30.17

Em 15 a menor energia do sistema é: $E' = m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$ 30.18

Agora definindo: $p' = \frac{m_o v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = m_o v$ $\qquad v'p' = \frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = m_o v' v$ 30.19

Com 18 e 19 deduzimos:

$$E' = c\sqrt{m_0^2 c^2 - p'^2} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = -\frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} + m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = -v'p' + T' \qquad 30.20$$

Se em 20 $m_o = \text{zero}$ então $E' = icp'$ 30.21

Fazendo a prova de 20:

$$E' = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = c\sqrt{m_0^2 c^2 - p'^2} = c\sqrt{m_0^2 c^2 - \left(\frac{m_o v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\right)^2} = c\sqrt{m_0^2 c^2 - \frac{m_0^2 v'^2}{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = m_o c\sqrt{\frac{c^2\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)}{1+\frac{v'^2}{c^2}} - \frac{v'^2}{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$$

$$E' = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = c\sqrt{m_0^2 c^2 - p'^2} = \frac{m_o c}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\sqrt{c^2\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right) - v'^2} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$$

$$E' = m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = c\sqrt{m_0^2 c^2 - p'^2} = c\sqrt{m_0^2 c^2 - (m_o v)^2} = c\sqrt{m_0^2 c^2 - m_0^2 v^2} = m_o c\sqrt{c^2 - v^2} = m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

A aplicação de 8, 19 e 20 em 18 resulta na energia mais baixa do sistema escrito como:

$E' = c\sqrt{m_0^2c^2 - p'^2} = -T = -v'p' + T'$ Assim nós temos $v'p' = T' + T$ 30.18b

Com 19 e 20 podemos escrever 15 na forma:

$$E_k = m_oc^2 - m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_oc^2 + \frac{m_ov'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} - m_oc^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = -E_p \qquad 30.15b$$

$$E_k = E_0 + T = E_0 + v'p' - T' = -E_p \qquad 30.15c$$

A partir de 15c podemos definir a energia inercial de repouso $E'_0 = m_o$ e $E_0 = m_o$ na forma:

$E_0 = -T - E_p = m_oc^2$ e $E'_0 = -v'p' + T' - E_p = m_oc^2.$ 30.22

Definindo a Lagrangeana como: $L' = T' - E_p = m_oc^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} + \frac{k}{r}$ 30.23

Este Lagrangeana está de acordo com $\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$ prova no final.

$E_0 = -T - E_p = m_oc^2$ $E'_0 = -v'p' + L' = m_oc^2$ 30.24

Reescrevendo 11 e 22:

$E'_0 = T' + E_p = m_oc^2$ e $E_0 = vp - T + E_p = m_oc^2$ 30.11

$E_0 = -T - E_p = m_oc^2$ e $E'_0 = -v'p' + T' - E_p = m_oc^2$ 30.22

Igualando E_0 de 11 com E_0 de 22 obtemos:

$$E_0 = vp - T + E_p = -T - E_p = m_oc^2$$

Desta obtemos: $vp = -2E_p$ $-E_p = \frac{vp}{2} = \frac{1}{2}\frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 30.25

Igualando $-E_p = \frac{vp}{2}$ a energia cinética de 3b obtemos:

$$E_k = m_oc^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - m_oc^2 = \frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_oc^2 = -E_p = \frac{vp}{2} = \frac{1}{2}\frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad 30.3d$$

Em 3d deveríamos ter:

$$\frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_oc^2 = \frac{1}{2}\frac{m_ov^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m_ov^2 + m_oc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) - m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2}m_ov^2$$

$$\frac{1}{2}m_ov^2 + m_oc^2 - m_oc^2\frac{v^2}{c^2} - m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \text{zero}$$

$$\frac{1}{2}m_ov^2 + m_oc^2 - m_ov^2 - m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \text{zero}$$

$$m_oc^2 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{c^2}m_ov^2 - m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \text{zero}$$

$$m_oc^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - m_oc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \text{zero}$$

A aproximação $\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \cong \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ é a causa do retrocesso do periélio de Mercúrio.

$m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \text{zero}$ Resultado que prova que $E_k = \frac{1}{2}\frac{m_o v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Igualando E_0' de 11 com E_0' de 22 obtemos:

$$E_0' = T' + E_p = -v'p' + T' - E_p = m_o c^2$$

Desta obtemos: $v'p' = -2E_p$ $\quad -E_p = \frac{v'p'}{2} = \frac{1}{2}\frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$ 30.26

Igualando $-E_p = \frac{v'p'}{2}$ a energia cinética de 15b obtemos:

$$E_k = m_o c^2 - m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_o c^2 + \frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} - m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = -E_p = \frac{v'p'}{2} = \frac{1}{2}\frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad 30.15d$$

Em 15d deveríamos ter:

$$m_o c^2 + \frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} - m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = \frac{1}{2}\frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$$

$$m_o c^2 + \frac{1}{2}\frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} - m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = \text{zero}$$

$$m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} + \frac{1}{2}m_o v'^2 - m_o c^2\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right) = \text{zero}$$

$$m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} + \frac{1}{2}m_o v'^2 - m_o c^2 - m_o v'^2 = \text{zero}$$

$$m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - m_o c^2 - \frac{1}{2}m_o\frac{c^2}{c^2}v'^2 = \text{zero}$$

$$m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - m_o c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v'^2}{c^2}\right) = \text{zero}$$

A aproximação $\left(1+\frac{1}{2}\frac{v'^2}{c^2}\right) \cong \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}$ é a causa do avanço do periélio de Mercúrio.

$m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = \text{zero}$ Resultado que prova que $E_k = \frac{1}{2}\frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$.

De 25 e 26 resulta: $vp = v'p'$ 30.27

Aplicando 25 em E_0 de 22:

$$E_0 = -T - E_p = -T + \frac{vp}{2} = m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{2}\frac{m_o v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{2v^2}{2c^2}+\frac{v^2}{2c^2}\right) \qquad 30.28$$

$$E_0 = -T - E_p = -T + \frac{vp}{2} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right) \cong \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_o c^2 \qquad 30.28$$

Aplicando 25 em E_0 de 11:

$E_0 = vp - T + E_p = \frac{2vp}{2} - T - \frac{vp}{2} = -T + \frac{vp}{2}$ Resultado já obtido em 28

Aplicando 26 em E'_0 de 11:

$$E'_0 = T' + E_p = T' - \frac{v'p'}{2} = m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - \frac{1}{2}\frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\left(1+\frac{2v'^2}{2c^2}-\frac{v'^2}{2c^2}\right) \qquad 30.29$$

$$E'_0 = T' + E_p = T' - \frac{v'p'}{2} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\left(1+\frac{v'^2}{2c^2}\right) \cong \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = m_o c^2 \qquad 30.29$$

A aproximação que existe em 28 e 29 é a causa do avanço e retrocesso do periélio de Mercúrio.

Aplicando 26 em E'_0 de 22:

$E'_0 = -v'p' + T' - E_p = -\frac{2v'p'}{2} + T' + \frac{v'p'}{2} = T' - \frac{v'p'}{2}$ Resultado já obtido em 29.

A prova de que $\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'}\right) = \frac{\partial L'}{\partial x}$ $\qquad L' = T' - E_p = m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} + \frac{k}{r}$

$F'_x = \frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'}\right) = \frac{\partial L'}{\partial x}$ $\qquad F'_x = \frac{d}{dt'}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}'}\left(m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{r}\right)$

$v' = \frac{ds}{dt'} = \sqrt{\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2}$ $\qquad ds = |ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ $\qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$F'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{r}\right) = k\frac{\partial}{\partial x}(r^{-1}) = k(-1)r^{-1-1=-2}\frac{\partial r}{\partial x} = -k\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} = -k\frac{x}{r^3}$ $\qquad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$

$\vec{F}' = F'_x\hat{\imath} + F'_y\hat{\jmath} + F'_z\hat{k} = -k\frac{x}{r^3}\hat{\imath} - k\frac{y}{r^3}\hat{\jmath} - k\frac{z}{r^3}\hat{k} = -\frac{k}{r^3}(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}) = -\frac{k}{r^3}\vec{r} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$ $\qquad = 19.01$

$$p'_x = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\right) = m_o c^2\frac{1}{2}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}} 2\frac{v'}{c^2}\frac{\partial v'}{\partial \dot{x}'} = \frac{m_o v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{\partial v'}{\partial \dot{x}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \dot{x}'} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}'}\left(\sqrt{\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2}\right) = \frac{1}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2)^{\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}} 2\dot{x}'\frac{\partial \dot{x}'}{\partial \dot{x}'} = \frac{\dot{x}'}{\sqrt{\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2}} = \frac{\dot{x}'}{v'}$$

$$p'_x = \frac{\partial}{\partial \dot{x}'}\left(m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\right) = \frac{m_o v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{\partial v'}{\partial \dot{x}'} = \frac{m_o v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{\dot{x}'}{v'} = \frac{m_o \dot{x}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$$

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{m_o \dot{x}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\right) = \frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)}\left[\frac{d\dot{x}'}{dt'}\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - \dot{x}'\frac{d}{dt'}\left(\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\right)\right] = \frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)}\left[\ddot{x}'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - \dot{x}'\frac{d}{dt'}\left(\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\right)\right]$$

$$\frac{d}{dt'}\left(\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}} 2\frac{v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'} = \frac{\frac{v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}$$

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{m_o \dot{x}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\right) = \frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)}\left[\ddot{x}'\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - \dot{x}'\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}\right]$$

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{m_o \dot{x}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\right) = \frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\ddot{x}'\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right) - \dot{x}'\frac{v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}\right]$$

$\vec{F}' = F'_x\hat{\imath} + F'_y\hat{\jmath} + F'_z\hat{k}$

$$\vec{F}' = \frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{\left[\ddot{x}'\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right) - \dot{x}'\frac{v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}\right]\hat{\imath} + \left[\ddot{y}'\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right) - \dot{y}'\frac{v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}\right]\hat{\jmath} + \left[\ddot{z}'\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right) - z'\frac{v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}\right]\hat{k}\right\}$$

$$\vec{F}' = \frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{\ddot{x}'\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\hat{\imath} - \dot{x}'\frac{v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}\hat{\imath} + \ddot{y}'\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\hat{\jmath} - \dot{y}'\frac{v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}\hat{\jmath} + \ddot{z}'\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\hat{k} - z'\frac{v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}\hat{k}\right\}$$

$$\vec{F}' = \frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\left(\ddot{x}'\hat{\imath} + \ddot{y}'\hat{\jmath} + \ddot{z}'\hat{k}\right)\hat{\imath} - \left(\dot{x}' + \dot{y}'\hat{\jmath} + z'\hat{k}\right)\frac{v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}\right\}$$

$$\vec{F}' = \frac{m_o}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}'}{dt'} - \frac{v'}{c^2}\frac{dv'}{dt'}\vec{v}'\right\} \qquad = 28.16$$

§30 Energia esclarecimento continuação

Com 3d, 6, e 9 obtemos:

$$E_k = E - E_0 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2 = \frac{m_o v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_o c^2 = \frac{1}{2}\frac{m_o v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{2}vp \qquad 30.30$$

Desta obtemos: $\frac{v^2}{c^2} = \frac{4E_k^2}{c^2p^2}$ 30.31

Que aplicada em 8 resulta: $p = \frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{4E_k^2}{c^2p^2}}} \rightarrow E_k = \frac{c}{2}\sqrt{p^2 - m_0^2 v^2}$ 30.32

Se em 32 $m_o = \text{zero}$ então: $E_k = \frac{cp}{2} = \frac{1}{2}vp \rightarrow v = c$ 30.33

Para uma partícula com velocidade $c = \lambda\gamma$ e massa de repouso $m_o = \text{zero}$ obtemos:

$E = h\gamma$ $\qquad p = \frac{h}{\lambda}$ 30.34

Aplicando $c = \lambda\gamma$ e 34 em 33 resulta:

$$E_k = \frac{cp}{2} = \frac{\lambda\gamma}{2}\frac{h}{\lambda} = \frac{\gamma h}{2} \rightarrow E_k = \frac{h\gamma}{2} \qquad 30.35$$

From 34 and 35 we have:

$$E = 2E_k \qquad 30.36$$

Aplicando 36 em 30 temos:

$$E_k = E - E_0 \rightarrow E_k = 2E_k - E_0 \rightarrow E_0 = E_k = \frac{E}{2} \qquad 30.37$$

Aplicando $E_0 = m_o c^2$ em 37 obtemos:

$$E_0 = E_k = \frac{E}{2} = m_o c^2 \rightarrow m_o = \frac{E_k}{c^2} = \frac{E}{2c^2} \qquad 30.38$$

Com 33 e 38 obtemos:

$$E_k = \frac{cp}{2} = m_o c^2 \rightarrow p = 2m_o c \qquad 30.39$$

Esclarecimentos

De 30 e 8 obtemos: $E_k = \frac{1}{2}\frac{m_o v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{2}vp,$ $\quad E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$ $\quad E_0 = m_o c^2,$ $\quad p = \frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 30.40

Apliquemos 40 na conservação da energia $E_k = E - E_0$ 30.41

$E_k = E - E_0 \rightarrow \frac{1}{2}\frac{m_o v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - E_0 \rightarrow \frac{1}{2}m_o v^2 = m_o c^2 - E_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 30.42

Fazendo em 42 $m_o = \text{zero}$ obtemos:

$\frac{1}{2}(m_o = \text{zero})v^2 = (m_o = \text{zero})c^2 - E_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \rightarrow -E_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \text{zero}$ 30.43

Se em 43 $E_0 = \text{zero} \rightarrow -(E_0 = \text{zero})\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \text{zero}$ sem nenhum resultado desejável.

Agora se em 43 $E_0 \neq \text{zero} \rightarrow -(E_0 \neq \text{zero})\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \text{zero} \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 \rightarrow v = c$ 30.44

Em 44 obtemos $v = c$ independente do valor $E_0 \neq \text{zero}$.

De 40 obtemos: $\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2E_k}{v^2} = \frac{E}{c^2} = \frac{p}{v}$ 30.45

De 45 obtemos: $\frac{v^2}{c^2} = \frac{2E_k}{E} = \frac{4E_k^2}{c^2p^2} = \frac{c^2p^2}{E^2}$ 30.46

Mas $\frac{v^2}{c^2} = 1$ de 44 foi obtido a partir da conservação da energia $E_k = E - E_0$ quando $m_o = \text{zero}$ e $E_0 \neq \text{zero}$ então em 46 deveríamos ter $\frac{v^2}{c^2} = \frac{2E_k}{E} = \frac{4E_k^2}{c^2p^2} = \frac{c^2p^2}{E^2} = 1$ 30,47

Quando tivermos $m_o = \text{zero}$, $v = c$ e $E_0 \neq \text{zero}$ de 47 obtemos:

$\frac{v^2}{c^2} = \frac{2E_k}{E} = 1 \rightarrow E = 2E_k$ igual a 36 30.48

$\frac{v^2}{c^2} = \frac{4E_k^2}{c^2p^2} = 1 \rightarrow E_k = \frac{cp}{2}$ igual a 33 30.49

$\frac{v^2}{c^2} = \frac{c^2p^2}{E^2} = 1 \rightarrow E = cp$ igual a 10 30.50

Aplicando 9 e 32 na equação de conservação de energia $E_k = E - E_0$ obtemos:

$E_k = E - E_0 \rightarrow \frac{c}{2}\sqrt{p^2 - m_0^2v^2} = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2} - E_0$ 30.51

Em 51 fazendo $m_o = \text{zero}$ obtemos:

$\frac{c}{2}\sqrt{p^2 - (m_0^2 = \text{zero})v^2} = c\sqrt{(m_0^2 = \text{zero})c^2 + p^2} - E_0 \rightarrow E_0 = \frac{cp}{2} = E_k$ igual a 37 30.52

Iniciemos com a equação 8.5:

$$\frac{\partial}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}=zero \qquad 8.5$$

$$\frac{\partial}{\partial x}+\frac{x/t}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{c}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}=zero \qquad c=\frac{x}{t} \qquad 31.1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}=zero \qquad 31.2$$

As variáveis envolvidas serão:

$$c=\lambda\gamma \qquad p=\frac{h}{\lambda} \qquad E=h\gamma \qquad K=\frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega=2\pi\gamma \qquad 31.3$$

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{h}{\frac{2\pi}{K}}=\frac{h}{2\pi}K=\hbar K \qquad E=h\gamma=h\frac{\omega}{2\pi}=\hbar\omega \qquad \hbar=\frac{h}{2\pi} \qquad 31.4$$

$$p=\hbar K \qquad E=\hbar\omega \qquad E=cp \qquad K=\frac{\omega}{c} \qquad \omega=cK \qquad 31.5$$

Construção da função Ψ:

$$c=\lambda\gamma=\frac{x}{t}\to\frac{x}{\lambda}=\gamma t\to\frac{x}{\lambda}-\gamma t=zero\to i2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\gamma t\right)=\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x-2\pi\gamma t\right)=\mathrm{i}(Kx-\omega t)=zero \qquad 31.6$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Kx-\omega t)}=\mathrm{e}^{\mathrm{zero}}=1 \qquad \mathrm{i}=\sqrt{-1} \qquad \mathrm{i}^2=-1 \qquad 31.7$$

$$\Psi=\Psi(x,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Kx-\omega t)} \qquad 31.8$$

Algumas derivadas da função $\Psi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Kx-\omega t)}$:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Kx-\omega t)}(-i\omega)=-\mathrm{i}\omega\Psi \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=(-i\omega)(-i\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Kx-\omega t)}=-\omega^2\Psi$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\mathrm{i}\omega\Psi \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-\omega^2\Psi \qquad 31.9$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Kx-\omega t)}iK=iK\Psi \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Kx-\omega t)}iKiK=-K^2\Psi$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=iK\Psi \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=-K^2\Psi \qquad 31.10$$

$$d\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial x}\mathrm{dx}+\frac{\partial\Psi}{\partial t}\mathrm{dt}=d(1)=zero\to iK\Psi\mathrm{dx}-\mathrm{i}\omega\Psi\mathrm{dt}=\mathrm{zero}\to\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}=\frac{\omega}{K}=c\to\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}=\frac{x}{t} \qquad 1.13$$

Aplicando a função Ψ em 2 obtemos:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t}=zero \qquad 31.11$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t}=iK\Psi-\frac{1}{c}\mathrm{i}\omega\Psi=\mathrm{zero} \qquad K=\frac{\omega}{c}$$

Construção da equação de onda:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)x\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)\to\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\to-K^2\Psi=-\frac{\omega^2}{c^2}\Psi\to K=\frac{\omega}{c} \qquad 31.12$$

$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=zero$ onde temos $\Psi=\Psi(x,t)$.Está é a equação de onda 31.13

Construção da primeira equação de Erwin Schrödinger utilizando a equação de onda:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=zero\to\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}(-\omega^2\Psi)=zero\to\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+K^2\Psi=zero \qquad 31.14$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+K^2\Psi=zero \qquad \Psi=\Psi(x) \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x}=\frac{d\Psi}{dx} \qquad 31.15$$

$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + K^2\Psi = zero$ 31.16

$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{2m}K^2\Psi = zero$ $\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2m}K^2\Psi = zero$ 31.17

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2m}K^2\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \frac{p^2}{2m}\Psi = zero$ $\quad p = \hbar K$ 31.18

Se em 30.4 temos $E_k + E_p(x) \neq zero$ então podemos escrever $E = E_k + E_p(x) = \hbar\omega.$ 31.19

Erwin Schrödinger adotou para energia $E = \frac{p^2}{2m} + E_p(x)$ onde temos $E_k = \frac{p^2}{2m}$. 31.20

De 20 obtemos $-\frac{p^2}{2m} = E_p(x) - E$ que aplicada em 18 resulta em: 31.21

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \frac{p^2}{2m}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left[E_p(x) - E\right]\Psi = zero$ 31.22

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p(x)\Psi = E\Psi$ Nesta temos: $\Psi = \Psi(x)$ 31.23

Em 23 temos a equação de Erwin Schrödinger independente do tempo para uma só dimensão.

Construção da segunda equação de Erwin Schrödinger ultilizando as equações 14 e 11:

Multiplicando 14 por $\frac{\hbar^2}{2m}$ obtemos $\frac{\hbar^2}{2m}$: $\quad \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}K^2\Psi = zero$ 31.24

De 11 obtemos: $\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = zero \to c\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial t} = zero \to ciK\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial t} = i\omega\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial t} = zero$

$i\omega\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial t} = zero \to ii\hbar\omega\Psi + i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = zero \to -\hbar\omega\Psi + i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = zero$ 31.25

Somando 24 e 25 = $\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{2m}K^2\Psi = zero\right)$ + $\left(-\hbar\omega\Psi + i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = zero\right)$

$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}K^2\Psi - \hbar\omega\Psi + i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = zero$ 31.26

$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}K^2\Psi - \hbar\omega\Psi = -i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ 31.27

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}K^2\Psi + \hbar\omega\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ 31.28

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \hbar\omega\Psi - \frac{\hbar^2}{2m}K^2\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \left(\hbar\omega - \frac{\hbar^2}{2m}K^2\right)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ $\quad E = \hbar\omega \quad p^2 = \hbar^2K^2$ 31.29

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \left(E - \frac{p^2}{2m}\right)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ 31.30

Da energia de Erwin Schrödinger obtemos $E = \frac{p^2}{2m} + E_p(x) \to E_p(x) = E - \frac{p^2}{2m}$ 31.31

Aplicando 31 em 30 obtemos:

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + E_p(x)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ Nesta temos: $\Psi = \Psi(x,t)$ 31.32

Em 32 temos a equação de Erwin Schrödinger dependente do espaço e tempo.

De 30.8 e 30.3d obtemos:

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{m_o v}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}} \qquad 31.33$$

$$\mathrm{E_k} = \frac{\mathrm{m_o v^2}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}} + \mathrm{m_o c^2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}} - \mathrm{m_o c^2} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{m_o v^2}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}} \qquad 31.34$$

Se em ambas as equações na razão $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}$ a velocidade da luz e considerada infinita, então teremos $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}=\infty} = \mathrm{zero}$ resultando em:

$$\mathrm{p} = \mathrm{m_o v} \qquad 31.35$$

$$\mathrm{m_o v^2} + \mathrm{m_o c^2} - \mathrm{m_o c^2} = \frac{1}{2}\mathrm{m_o v^2} \to \mathrm{E_k} = \frac{1}{2}\mathrm{m_o v^2} \qquad 31.36$$

É isso que acontece na Mecânica Quântica a velocidade da luz tem o caráter de ser infinita e por isso a equação de energia de Erwin Schrödinger energy $E = E_k + E_p(x)$ onde $E_k = \frac{p^2}{2m}$ apresenta resultados perfeitos. Devemos notar que em 36 a energia inercial $\mathrm{m_o c^2}$ também desaparece.

Construção da função Ψ:

$$c = \frac{E}{p} = \frac{x}{t} \to px = Et \to px - Et = zero \to \frac{i}{\hbar}(px - Et) = zero \qquad 31.37$$

$$\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} = \mathrm{e}^{\mathrm{zero}} = 1 \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1} \qquad \mathrm{i}^2 = -1 \qquad 31.38$$

$$\Psi = \Psi(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \qquad 31.39$$

Algumas derivadas da função $\Psi = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}\left(-\frac{i}{\hbar}E\right) = -\frac{i}{\hbar}E\Psi \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}E\Psi \qquad \mathrm{E}\Psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \qquad 31.40$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(px-E\ )}\left(-\frac{i}{\hbar}E\right)\left(-\frac{i}{\hbar}E\right) = -\frac{1}{\hbar^2}E^2\Psi \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\hbar^2}E^2\Psi \qquad E^2\Psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \qquad 31.41$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(px-E\ )}\left(\frac{i}{\hbar}p\right) = \frac{i}{\hbar}p\Psi \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar}p\Psi \qquad \mathrm{p}\Psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial x} \qquad 31.42$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(px-E\ )}\left(\frac{i}{\hbar}p\right)\left(\frac{i}{\hbar}p\right) = -\frac{1}{\hbar^2}p^2\Psi \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\hbar^2}p^2\Psi \qquad p^2\Psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} \qquad 31.43$$

Do diferencial total de Ψ obtemos:

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\mathrm{dx} + \frac{\partial\Psi}{\partial t}\mathrm{dt} = d(1) = zero \to \left(\frac{i}{\hbar}p\Psi\right)\mathrm{dx} + \left(-\frac{i}{\hbar}E\Psi\right)\mathrm{dt} = \mathrm{zero} \to \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \frac{E}{p} = c \to \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \frac{x}{t} \qquad 31.44$$

Aplicando a função Ψ e suas derivadas em $E = cp$ e $E^2 = c^2p^2$ obtemos 31.11 e 31.13:

$$E\Psi = cp\Psi \to -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = c\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial x} \to -\frac{\partial\Psi}{\partial t} = c\frac{\partial\Psi}{\partial x} \to \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = zero \qquad = 31.11 \qquad 31.45$$

$$E^2\Psi = c^2p^2\Psi \to -\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = c^2\left(-\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right) \to \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = zeo \qquad = 31.13 \qquad 31.45b$$

Escrevamos a equação de energia de Erwin Schrödinger $E = E_k + E_p(x)$ com $E_k = \frac{p^2}{2m}$:

$$E = E_k + E_p(x) = \frac{p^2}{2m} + E_p(x) \to \frac{p^2}{2m} + E_p(x) = E \qquad 31.46$$

Nesta apliquemos a função Ψ e suas derivadas:

$$\frac{p^2\Psi}{2m} + E_p(x)\Psi = E\Psi \rightarrow \frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right) + E_p(x)\Psi = E\Psi \qquad 31.47$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + E_p(x)\Psi = E\Psi \qquad \text{In this } \Psi = \Psi(x) \rightarrow \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2\Psi}{dx^2} \qquad 31.48$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p(x)\Psi = E\Psi \qquad 31.49$$

Em 49 temos a equação de Erwin Schrödinger independente do tempo para uma só dimensão.

Esvrevendo novamente a equação de energia de Erwin Schrödinger $E = E_k + E_p(x)$ com $E_k = \frac{p^2}{2m}$:

$$E = E_k + E_p(x) = \frac{p^2}{2m} + E_p(x) \rightarrow \frac{p^2}{2m} + E_p(x) = E \qquad 31.50$$

Nesta apliquemos a função Ψ e sua derivadas:

$$\frac{p^2\Psi}{2m} + E_p(x)\Psi = E\Psi \rightarrow \frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right) + E_p(x)\Psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \qquad 31.51$$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right) + E_p(x)\Psi = -\frac{i.\hbar}{i.i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + E_p(x)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \qquad 31.52$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + E_p(x)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \qquad \text{Nesta temos: } \Psi = \Psi(x,t) \qquad 31.53$$

Em 53 temos a equação de Erwin Schrödinger dependente do espaço e tempo.

§ 32 Versão Relativística da equação de Erwin Schödinger 18/09/2021

A uma partícula em movimento com velocidade v ao longo do eixo x se associa uma onda infinita na forma:

$$\Psi = \Psi(\mathrm{x,t}) = \mathrm{Ae}^{\frac{i}{\hbar}\emptyset} = \mathrm{Ae}^{\frac{i}{\hbar}(\mathrm{px-E}\ )} \qquad \text{A = Constante} \qquad 32.1$$

Para uma onda plana de fase constante $\emptyset = \emptyset(\mathrm{x,t}) = \mathrm{px} - \mathrm{Et} = \mathrm{constante}$ obtemos a velocidade u de fase igual a:

$$\mathrm{d}\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{\partial\emptyset}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{dt} = \mathrm{zero} \rightarrow \mathrm{d}\emptyset = \mathrm{pdx} - \mathrm{Edt} = \mathrm{zero} \rightarrow \mathrm{u} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \frac{E}{p} \qquad \mathrm{u} = \frac{E}{p} \qquad 32.2$$

Sendo a energia E, e o momento p propriedades de uma partícula em movimento com velocidade v e sendo a frequência γ e o comprimento de onda λ propriedades do movimento ondulatório associado à partícula. Louis De Broglie relacionou estas propriedades nas seguintes equações:

$$\mathrm{E} = \mathrm{h}\gamma = \frac{\mathrm{m_o c^2}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v^2}}{\mathrm{c^2}}}} \qquad \mathrm{p} = \mathrm{hk} = \frac{\mathrm{m_o v}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v^2}}{\mathrm{c^2}}}} \qquad k = \frac{1}{\lambda} \qquad 32.3$$

De 3 obtemos a velocidade u de fase:

$$\mathrm{u} = \frac{\gamma}{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{c^2}}{\mathrm{v}} \qquad 32.4$$

Em 4 temos $\mathrm{m_0} > \mathrm{zero}$ porque se $\mathrm{m_0} = \mathrm{zero}$ então $\mathrm{E} = \mathrm{cp}$ (30.10) e teríamos:

$$\mathrm{u} = \frac{\gamma}{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{p}} = \mathrm{c} \qquad 32.5$$

E em 4 a velocidade de fase seria $\mathrm{u} = \mathrm{c}$ e não $\mathrm{u} = \frac{\mathrm{c^2}}{\mathrm{v}}$. 32.6

Como $\mathrm{m_0} > \mathrm{zero}$ então $\mathrm{v} < \mathrm{c}$ e em 4 temos $\mathrm{u} > \mathrm{c}$. 32.7

Sendo em 4 $\mathrm{u} = \frac{\mathrm{c^2}}{\mathrm{v}}$ a velocidade de fase então $\mathrm{c} \neq \frac{\gamma}{\mathrm{k}}$ porque se em 4 $\mathrm{c} = \frac{\gamma}{\mathrm{k}}$ então teríamos:

$$\mathrm{u} = \frac{\gamma}{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{c^2}}{\mathrm{v}} = \frac{\left(\frac{\gamma}{\mathrm{k}}\right)^2}{\mathrm{v}} \rightarrow \frac{\gamma}{\mathrm{k}} = \frac{\left(\frac{\gamma}{\mathrm{k}}\right)^2}{\mathrm{v}} \rightarrow \mathrm{u} = \mathrm{v} = \mathrm{c} = \frac{\gamma}{\mathrm{k}}. \qquad 32.8$$

E em 4 a velocidade de fase seria $u = v = c$ e não $u = \frac{c^2}{v}$. 32.9

De 4 obtemos a velocidade v escrita como:

$$u = \frac{\gamma}{k} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v} \to v = c^2\frac{p}{E} \quad 32.10$$

Aplicando 10 na energia cinética $E_k = \frac{1}{2}vp = \frac{1}{2}\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ obtemos para $m_0 > \text{zero}$ e $v < c$:

$$E_k = \frac{1}{2}vp = \frac{1}{2}\left(c^2\frac{p}{E}\right)p = \frac{1}{2}\frac{c^2p^2}{E} \to E_k = \frac{1}{2}\frac{c^2p^2}{E} \quad 32.11$$

Quando $m_0 = \text{zero}$ então $v = c$ e temos $E_k = \frac{cp}{2}$ (30.33) e $E = cp$ (30.10).

Multiplicando 30.33 por 30.10 obtemos:

$$E_k E = \frac{cp}{2}cp \to E_k = \frac{1}{2}\frac{c^2p^2}{E} \quad 32.12$$

E temos 11 igual a 12 demonstrando que a equação $E_k = \frac{1}{2}\frac{c^2p^2}{E}$ é ambivalente sendo de validade geral para $m_0 \geq \text{zero}$ e $v \leq c$.

Sabemos da matemática que a velocidade de grupo v_g é dada por: $v_g = \frac{d\gamma}{dk}$ 32.13

De 3 obtemos a velocidade na forma:

$$E = h\gamma = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \to (h\gamma)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2c^4 \to \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2c^4}{h^2\gamma^2} \to v = c\sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{h^2\gamma^2}} \quad 32.14$$

Em 14 temos a velocidade da partícula somente função da frequência $v = v(\gamma)$.

Derivando a velocidade de 14 em relação à frequência obtemos:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2c^4}{h^2\gamma^2} \to \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2c^4}{h^2}\gamma^{-2} \to \frac{2v}{c^2}\frac{dv}{d\gamma} = -\frac{m_0^2c^4}{h^2}(-2)\gamma^{-3} \to \frac{dv}{d\gamma} = \frac{c^2}{v}\left(\frac{m_0^2c^4}{h^2\gamma^3}\right)$$

$$\frac{dv}{d\gamma} = \frac{c^2}{v}\left(\frac{m_0^2c^4}{h^2\gamma^3}\right) = \frac{\gamma}{k}\left(\frac{m_0^2c^4}{h^2\gamma^3}\right) = \frac{m_0^2c^4}{h^2k\gamma^2} \to \frac{dv}{d\gamma} = \frac{m_0^2c^4}{h^2k\gamma^2} \quad 32.15$$

Derivando a velocidade v de 10 em relação à frequência e considerando que k é função da frequência $k = k(\gamma)$ obtemos:

$$v = c^2\frac{p}{E} = c^2\frac{k}{\gamma} = c^2k\gamma^{-1} \to \frac{dv}{d\gamma} = c^2\left[\frac{dk}{d\gamma}\gamma^{-1} + k(-1)\gamma^{-1-1}\right] = c^2\left(\frac{1}{\gamma}\frac{dk}{d\gamma} - \frac{k}{\gamma^2}\right) \to \frac{dv}{d\gamma} = c^2\left(\frac{1}{\gamma}\frac{dk}{d\gamma} - \frac{k}{\gamma^2}\right) \quad 32.16$$

Devemos ter 15 igual a 16 por isso:

$$\frac{dv}{d\gamma} = \frac{m_0^2c^4}{h^2k\gamma^2} = c^2\left(\frac{1}{\gamma}\frac{dk}{d\gamma} - \frac{k}{\gamma^2}\right) \to \frac{m_0^2c^2}{h^2k\gamma^2} = \frac{1}{\gamma}\frac{dk}{d\gamma} - \frac{k}{\gamma^2} \to \frac{m_0^2c^2}{h^2k\gamma} = \frac{dk}{d\gamma} - \frac{k}{\gamma} \to \frac{dk}{d\gamma} = \frac{m_0^2c^2}{h^2k\gamma} + \frac{k}{\gamma}$$

$$\frac{dk}{d\gamma} = \frac{m_0^2c^2}{h^2k\gamma} + \frac{k}{\gamma} \to \frac{dk}{d\gamma} = \frac{m_0^2c^2}{h^2k\gamma} + \frac{h^2kk}{h^2k\gamma} = \frac{m_0^2c^2+h^2k^2}{h^2k\gamma} = \frac{m_0^2c^2+p^2}{Ep} = \frac{\frac{E^2}{c^2}}{Ep} = \frac{1}{c^2}\frac{E}{p}$$

$$\frac{dk}{d\gamma} = \frac{1}{c^2}\frac{E}{p} = \frac{1}{v} \to v_g = \frac{d\gamma}{dk} = v \to v_g = v \quad 32.17$$

E em 17 temos a velocidade de grupo v_g igual à velocidade v da partícula.

De 30.9 obtemos:

$$E = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2} \to \frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2c^2 \quad 32.18$$

Aplicando 3 em 18 e derivando a frequência γ em relação a k obtemos:

$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2c^2 \rightarrow \frac{h^2\gamma^2}{c^2} = h^2k^2 + m_0^2c^2 \rightarrow \frac{h^2}{c^2}2\gamma\frac{d\gamma}{dk} = h^2 2k \rightarrow \frac{d\gamma}{dk} = c^2\frac{k}{\gamma}$ 32.19

$v_g = \frac{d\gamma}{dk} = c^2\frac{k}{\gamma} = v \rightarrow v_g = v$ 32.20

E em 20 temos a velocidade de grupo v_g igual à velocidade v da partícula.

A equação $E = E_k + E_p = \frac{p^2}{2m} + E_p$ de Erwin Schödinger da Mecânica Quântica iguala a energia total E com a soma da energia cinética E_k com a energia potencial E_p, para prosseguir nessa receita é necessário à denominação de algumas funções.

A denominação de energia cinética em relatividade só deve ser atribuída a diferenças entre energias, os melhores exemplos são:

$E_k = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2 = E - E_0$ 32.21

$E'_k = m_o c^2 - \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = E_0 - E'$ 32.22

Escrevendo 30.3:

$E_k = m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - m_o c^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2 = -E_p$ 30.3

Nesta denominando T'_k a energia cinética:

$T'_k = m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - m_o c^2$ 32.23

E permanece como energia cinética o termo $E_k = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2$ 32.21

Em 30.3 temos o resulta exato: $T'_k = E_k$ 32.24

O resultado é exato porque aplicando $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = 1$ em qualquer uma das duas obtemos a outra.

E temos 30.3 escrito como: $T'_k = E_k = -E_p$ 32.25

Escrevendo 30.15:

$E_k = m_o c^2 - m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_o c^2 - \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = -E_p$ 30.15

Nesta denominando as energias cinéticas:

$T_k = m_o c^2 - m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ e $E'_k = m_o c^2 - \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$ 32.26

Em 30.15 temos o resulta exato: $T_k = E'_k$ 32.27

O resultado é exato porque aplicando $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = 1$ em qualquer uma das duas obtemos a outra.
E temos 30.15 escrito como: $T_k = E'_k = -E_p$ 32.28

Da energia cinética 21 obtemos:

$$E_k = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2 = \frac{m_o v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_o c^2 \qquad 32.29$$

$$vp = \frac{m_o v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left(\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2\right) + \left(m_o c^2 - m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = E_k + T_k \rightarrow vp = E_k + T_k \qquad 32.30$$

$$vp = \frac{m_o v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = E + T \rightarrow vp = E + T \qquad 32.31$$

Nesta vp é a diferença entre a maior e a menor energia. Por isso a energia cinética média $E_k = \frac{1}{2}vp = \frac{1}{2}\frac{m_o v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ é a energia média da diferença entre a maior e a menor energia.

Da energia cinética 22 obtemos:

$$E'_k = m_o c^2 - \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = m_o c^2 + \frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} - m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} \qquad 32.32$$

$$v'p' = \frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \left(m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - m_o c^2\right) + \left(m_o c^2 - \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\right) = T'_k + E'_k \rightarrow v'p' = T'_k + E'_k \qquad 32.33$$

$$v'p' = \frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = T' - E' \rightarrow v'p' = T' - E' \qquad 32.34$$

Nesta v'p' é a diferença entre a maior e a menor energia. Por isso a energia cinética média $E'_k = \frac{1}{2}v'p' = \frac{1}{2}\frac{m_o v'^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$ é a energia média da diferença entre a maior e a menor energia.

Comparando 30 com 33 vemos que todos os termos na sequencia são exatamente iguais por isso temos:

$$vp = v'p' \qquad E_k = T'_k \qquad T_k = E'_k \qquad 32.35$$

Comparando 31 com 34 vemos que todos os termos na sequencia são exatamente iguais por isso temos:

$$vp = v'p' \qquad E = T' \qquad T = -E' \qquad 32.36$$

As energias E_k e T_k se relacionam por:

$$E_k = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2 = \frac{m_o c^2 - m_o c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad E_k = \frac{T_k}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad 32.37$$

As energias E'_k e T'_k se relacionam por:

$$E'_k = m_o c^2 - \frac{m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{m_o c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} - m_o c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad E'_k = \frac{T'_k}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad 32.38$$

De 25 e 28 obtemos:

$$E_k = -E_p \rightarrow E_k + E_p = zero \qquad E'_k = -E_p \rightarrow E'_k + E_p = zero \qquad 32.39$$

Agora denominando as Hamiltonianas H e H' como:

$$\mathrm{H} = \mathrm{E_k} + \mathrm{E_p} \qquad\qquad H' = E_k' + \mathrm{E_p} \qquad 32.40$$

Sendo as Hamiltonianas a energia total da partícula que por hipótese não é necessariamente igual à zero.

Agora também devemos definir as Lagrangeanas em função da energia cinética.

Agora de 30 e 33 obtemos:

$$\mathrm{vp} = \mathrm{E_k} + \mathrm{T_k} \rightarrow \mathrm{E_k} = \mathrm{vp} - \mathrm{T_k} \qquad\qquad \mathrm{v'p'} = \mathrm{T_k'} + \mathrm{E_k'} \rightarrow \mathrm{E_k'} = \mathrm{v'p'} - \mathrm{T_k'} \qquad 32.41$$

Aplicando 41 em 40 obtemos:

$$\mathrm{H} = \mathrm{E_k} + \mathrm{E_p} = \mathrm{vp} - \mathrm{T_k} + \mathrm{E_p} \qquad\qquad H' = E_k' + \mathrm{E_p} = \mathrm{v'p'} - T_k' + \mathrm{E_p} \qquad 32.42$$

Definindo as Lagrangeanas como:

$$\mathrm{L} = \mathrm{T_k} - \mathrm{E_p} = \mathrm{m_o c^2} - \mathrm{m_o c^2}\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v^2}}{\mathrm{c^2}}} + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{r}} \qquad 32.43$$

$$L' = T_k' - \mathrm{E_p} = \mathrm{m_o c^2}\sqrt{1 + \frac{\mathrm{v'^2}}{\mathrm{c^2}}} - \mathrm{m_o c^2} + \frac{k}{r} \qquad 32.44$$

Aplicando 43 e 44 em 42 obtemos a relação entre as Hamiltonianas e Lagrangeanas:

$$\mathrm{H} = \mathrm{vp} - \mathrm{T_k} + \mathrm{E_p} = \mathrm{vp} - \left(\mathrm{T_k} - \mathrm{E_p}\right) = \mathrm{vp} - \mathrm{L} \rightarrow \mathrm{H} = \mathrm{vp} - \mathrm{L} \qquad 32.45$$

$$\mathrm{H'} = \mathrm{v'p'} - \mathrm{T_k'} + \mathrm{E_p} = \mathrm{v'p'} - \left(\mathrm{T_k'} - \mathrm{E_p}\right) = \mathrm{v'p'} - \mathrm{L'} \rightarrow \mathrm{H'} = \mathrm{v'p'} - \mathrm{L'} \qquad 32.46$$

Agora para redefinir as Hamiltonianas façamos a soma de H e H’ de 40:

$$\left(\mathrm{H} = \mathrm{E_k} + \mathrm{E_p}\right) + \left(H' = E_k' + \mathrm{E_p}\right) \rightarrow H + H' = \mathrm{E_k} + E_k' + 2\mathrm{E_p} \qquad 32.47$$

Aplicando $T_k = E_k'$ de 27 em 47 obtemos:

$$H + H' = \mathrm{E_k} + E_k' + 2\mathrm{E_p} = \mathrm{E_k} + T_k + 2\mathrm{E_p} \rightarrow H + H' = \mathrm{E_k} + T_k + 2\mathrm{E_p} \qquad 32.48$$

Aplicando 30 $\mathrm{vp} = \mathrm{E_k} + \mathrm{T_k}$ em 48 obtemos:

$$\mathrm{H} + \mathrm{H'} = \mathrm{E_k} + \mathrm{T_k} + 2\mathrm{E_p} = \mathrm{vp} + 2\mathrm{E_p} \rightarrow \mathrm{H} + \mathrm{H'} = \mathrm{vp} + 2\mathrm{E_p} \qquad 32.49$$

Agora definindo as Hamiltonianas de acordo com 49:

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{vp} + \mathrm{E_p} \qquad 32.50$$

$$H' = \frac{1}{2}\mathrm{v'p'} + \mathrm{E_p} \qquad 32.51$$

Essas Hamiltonianas são invariantes H = H’.

Somando 50 mais 51 obtemos:

$$\left(\mathrm{H} = \frac{1}{2}\mathrm{vp} + \mathrm{E_p}\right) + \left(\mathrm{H'} = \frac{1}{2}\mathrm{v'p'} + \mathrm{E_p}\right) \rightarrow \mathrm{H} + \mathrm{H'} = \frac{1}{2}(\mathrm{vp} + \mathrm{v'p'}) + 2\mathrm{E_p} = \mathrm{vp} + 2\mathrm{E_p} \qquad 32.52$$

E obtemos 52 = 49.

A Hamiltoniana $H = \frac{1}{2}\mathrm{vp} + \mathrm{E_p}$ deve estar de acordo com a equação de Hamilton $\mathrm{v} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{p}}$.

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{2}\mathrm{vp} + \mathrm{E_p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{2}\mathrm{vp}\right) \qquad\qquad \frac{\partial \mathrm{E_p}}{\partial p} = zero \qquad 32.53$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{p}} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{2}\mathrm{vp}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{p}}\mathrm{p} + \frac{1}{2}\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{p}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{p}}\mathrm{p} + \frac{1}{2}\mathrm{v} \qquad 32.54$$

Derivando a velocidade de 10 $\mathrm{v}=\mathrm{c}^2\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{E}}$ temos:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{p}}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{p}}\left(\mathrm{c}^2\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{E}}\right)=\mathrm{c}^2\frac{\partial}{\partial \mathrm{p}}(pE^{-1})=\mathrm{c}^2\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{p}}E^{-1}+\mathrm{c}^2p\frac{\partial(E^{-1})}{\partial \mathrm{p}}=\frac{\mathrm{c}^2}{E}-\mathrm{c}^2pE^{-1-1=-2}\frac{\partial E}{\partial \mathrm{p}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{p}}=\frac{\mathrm{c}^2}{E}-\mathrm{c}^2pE^{-1-1=-2}\frac{\partial E}{\partial \mathrm{p}}=\frac{\mathrm{c}^2}{E}-\mathrm{c}^2\frac{\mathrm{p}}{E^2}\frac{\partial E}{\partial \mathrm{p}} \qquad 32.55$$

Agora derivando E em relação a p em 18 obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{p}}\left(\frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{c}^2}=\mathrm{p}^2+\mathrm{m}_0^2\mathrm{c}^2\right)\to\frac{2\mathrm{E}}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{p}}=2\mathrm{p}\to\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{p}}=\mathrm{p}\to\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{p}}=\mathrm{c}^2\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}}=\mathrm{v} \qquad 32.56$$

Aplicando 55 e 56 em 54 obtemos:

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{p}}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{p}}\mathrm{p}+\frac{1}{2}\mathrm{v}=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}-\mathrm{c}^2\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{E}^2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{p}}\right)\mathrm{p}+\frac{1}{2}\mathrm{v}=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}-\mathrm{c}^2\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{E}^2}(\mathrm{v})\right]\mathrm{p}+\frac{1}{2}\mathrm{v}$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{p}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}-\mathrm{c}^2\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{E}^2}(\mathrm{v})\right]\mathrm{p}+\frac{1}{2}\mathrm{v}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}\mathrm{p}-\frac{1}{2}\mathrm{c}^2\frac{\mathrm{p}^2}{\mathrm{E}^2}\mathrm{v}+\frac{1}{2}\mathrm{v}=\frac{1}{2}\mathrm{v}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}\mathrm{v}+\frac{1}{2}\mathrm{v}$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{p}}=\frac{1}{2}\mathrm{v}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}\mathrm{v}+\frac{1}{2}\mathrm{v}=\mathrm{v}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}\mathrm{v}=\mathrm{v}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}\right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{p}}=\mathrm{v}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}\right)=\mathrm{v} \qquad 32.57$$

Em 57 consideramos o termo $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}=zero$ ou poderíamos considerar que a velocidade da luz tem o caráter de ser infinita na Mecânica Quântica (MQ) $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}^2}{(c=\infty)^2}=zero$.

Aplicando na Hamiltoniana de 50 a formula 10 da velocidade $\mathrm{v}=\mathrm{c}^2\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{E}}$ obtemos:

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2}\mathrm{vp}+\mathrm{E_p}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{c}^2\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{E}}\right)\mathrm{p}+\mathrm{E_p}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2\mathrm{p}^2}{E}+\mathrm{E_p}\to H=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2\mathrm{p}^2}{E}+\mathrm{E_p} \qquad 32.58$$

E em 58 temos a energia cinética ambivalente de 11 $\mathrm{E_k}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2\mathrm{p}^2}{\mathrm{E}}$.

De 58 obtemos o valor de p:

$$\mathrm{p}=\sqrt{\frac{2E}{\mathrm{c}^2}(\mathrm{H}-\mathrm{E_p})}=\sqrt{\frac{2}{\mathrm{c}^2}\frac{\mathrm{m_o}\mathrm{c}^2}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}(\mathrm{H}-\mathrm{E_p})}=\sqrt{\frac{2\mathrm{m_o}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}(\mathrm{H}-\mathrm{E_p})} \qquad 32.59$$

Nesta fazendo $\mathrm{c}=\infty$ obtemos:

$$\mathrm{p}=\sqrt{\frac{2\mathrm{m_o}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}(\mathrm{H}-\mathrm{E_p})}=\sqrt{\frac{2\mathrm{m_o}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{(\infty)^2}}}(\mathrm{H}-\mathrm{E_p})}=\sqrt{2\mathrm{m_o}(\mathrm{H}-\mathrm{E_p})}\to p=\sqrt{2\mathrm{m_o}(\mathrm{H}-\mathrm{E_p})} \qquad 32.60$$

Em 60 temos o valor de p da teoria de Erwin Schödinger.

Aplicando 60 em 10 obtemos a velocidade da partícula:

$$\mathrm{v}=\mathrm{c}^2\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}\sqrt{\frac{2\mathrm{E}}{\mathrm{c}^2}(\mathrm{H}-\mathrm{E_p})}\to\mathrm{v}=\sqrt{\frac{2\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}(\mathrm{H}-\mathrm{E_p})} \qquad 32.61$$

No que segue o desenvolvimento é aproximadamente o método do próprio Erwin Schödinger.

Na Hamiltoniana 58 aplicando as equações de Hamilton Jacobi para o eixo x obtemos:

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{q}}=\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{x}}=\mathrm{p} \qquad -\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{t}}=\mathrm{H} \qquad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{t}}=-\mathrm{H}\left(\mathrm{q},\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{q}},\mathrm{t}\right)=-\mathrm{H}\left(x,\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{x}},\mathrm{t}\right) \qquad 32.62$$

$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2\mathrm{p}^2}{\mathrm{E}} + \mathrm{E_p} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2 + \mathrm{E_p} = -\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{t}}$ 32.63

$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2 + \mathrm{E_p} + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{t}} = zero$ 32.64

Para um sistema conservativo as equações de Hamilton Jacobi são dadas por:

$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{p}$ $\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{t}} = -\mathrm{H}$ 32.65

De 65 se conclui que a ação S pode ser na forma:

$\mathrm{S} = \mathrm{S}(x,t) = \mathrm{f(x)} + g(t) = constante$ 32.66

Onde f $= \mathrm{f(x)}$ é uma função de x que deve resultar em $\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{p}$ 32.67

Aplicando $\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}$ e $\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{t}} = -\mathrm{H}$ em 64 obtemos:

$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2 + \mathrm{E_p} + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{t}} = zero \to \frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2 + \mathrm{E_p} - H = zero$ 32.68

Agora façamos em 68 a transformação f $= \mathrm{f(x)} = kln\Psi$ 32.69

Onde k é uma constante.

A função f de 69 tem analogia com a entropia.

Aplicando 69 em 68 obtemos:

$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2 + \mathrm{E_p} - H = zero \to \frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}\left[\frac{\partial(kln\Psi)}{\partial \mathrm{x}}\right]^2 + \mathrm{E_p} - H = zero$ 32.70

$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}\left[\frac{\partial(kln\Psi)}{\partial \mathrm{x}}\right]^2 + \mathrm{E_p} - H = zero \to \frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{k}{\Psi}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{x}}\right)^2 + \mathrm{E_p} - H = zero$

$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{k}{\Psi}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{x}}\right)^2 + \mathrm{E_p} - H = zero \to \frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{x}}\right)^2 + (\mathrm{E_p} - H)\Psi^2 = zero$

$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + (\mathrm{E_p} - H)\Psi^2 = zero$ 32.71

Agora supondo que 71 não seja nula e tenha um resto R na forma:

$R = R\left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}, x\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + (\mathrm{E_p} - H)\Psi^2$ 32.72

O resto R deve ser um mínimo por isso deve atender o funcional:

$\int_{-\infty}^{+\infty} R\left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}, x\right) dx$ 32.73

E obtemos da equação de Euler Lagrange do funcional:

$$\frac{\partial R}{\partial \Psi} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial R}{\partial\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)}\right] = zero \to \frac{\partial}{\partial \Psi}\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + (\mathrm{E_p} - H)\Psi^2\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)}\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + (\mathrm{E_p} - H)\Psi^2\right]\right\} = zero$$

$$\frac{\partial}{\partial \Psi}\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + (\mathrm{E_p} - H)\Psi^2\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)}\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + (\mathrm{E_p} - H)\Psi^2\right]\right\} = 2(\mathrm{E_p} - H)\Psi - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}2\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\right] = zero$$

$$2(\mathrm{E_p} - H)\Psi - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}2\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\right] = (\mathrm{E_p} - H)\Psi - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + (\mathrm{E_p} - H)\Psi = \mathrm{zero}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + (\mathrm{E_p} - H)\Psi = \mathrm{zero} \to -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \mathrm{E_p}\Psi = \mathrm{H}\Psi$$

$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{c}^2k^2}{\mathrm{E}}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \mathrm{E_p}\Psi = \mathrm{H}\Psi$ 32.74

Em 74 temos $\Psi = \Psi(x) \rightarrow \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2\Psi}{dx^2}$ 32.75

$$-\frac{1}{2}\frac{c^2k^2}{E}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + E_p\Psi = H\Psi \rightarrow -\frac{1}{2}\frac{c^2k^2}{E}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p\Psi = H\Psi \qquad 32.76$$

Aplicando a energia $E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ em 76 obtemos:

$$-\frac{1}{2}\frac{c^2k^2}{E}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p\Psi = H\Psi \rightarrow -\frac{1}{2}\frac{c^2k^2}{\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p\Psi = H\Psi \rightarrow -\frac{1}{2}\frac{k^2}{\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p\Psi = H\Psi \qquad 32.77$$

Fazendo em 77 $c = \infty$ obtemos:

$$-\frac{1}{2}\frac{k^2}{\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p\Psi = H\Psi \rightarrow -\frac{1}{2}\frac{k^2}{\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{(c=\infty)^2}}}}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p\Psi = H\Psi \rightarrow -\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_o}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p\Psi = H\Psi \qquad 32.78$$

Agora em 78 fazendo k igual a constante de Planck $k = \hbar$ e trocando H por E porque agora não causa mais confusão:

$$-\frac{1}{2}\frac{k^2}{m_o}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p\Psi = H\Psi \rightarrow -\frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_o}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p\Psi = E\Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_o}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p\Psi = E\Psi \qquad 32.79$$

E temos 79 igual à equação 31.49 de Erwin Schödinger. O método utilizado neste trabalho é aproximadamente o utilizado por Erwin Schödinger.

§ 32 Continuação 19/09/2023

A Hamiltoniana da Mecânica Quântica (MQ) de Erwin Schrödinger é escrita como:

$$H = H(p,q) = E_k + E_p = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_o} + E_p \qquad E_k = E_k(p) \qquad E_p = E_p(q) \qquad 32.80$$

Onde representamos por m_o a massa inercial de repouso exatamente como na relatividade.

De 80 podemos obter a energia cinética da MQ escrita como:

$$E_k = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_o} = \frac{1}{2}\frac{(m_o v)^2}{m_o} = \frac{1}{2}m_o v^2 = \frac{1}{2}v m_o v = \frac{1}{2}vp \qquad 32.81$$

Na teoria de Hamilton a derivada de H em relação à p resulta a velocidade:

$$\frac{dH}{dp} = \frac{dE_k}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{2}\frac{p^2}{m_o}\right) = \frac{1}{2}\frac{2p}{m_o} = \frac{p}{m_o} = \frac{m_o v}{m_o} = v \qquad \frac{dE_p}{dp} = \text{zero} \qquad 32.82$$

Então inversamente podemos dizer que a energia cinética é dada por:

$$E_k = \frac{1}{2}m_o\left(\frac{dH}{dp}\right)\left(\frac{dH}{dp}\right) \qquad 32.83$$

Quando Hamilton criou sua teoria não existia qualquer suspeita de que o tempo é variável. Por isso não obteve uma Hamiltoniana para o observador O e outra para o observador O'.

Mas na Relatividade Ondulatória nos temos duas Hamiltonianas, H e H' sendo uma para cada observador, por isso podemos escrever a energia cinética de 83 na forma geral:

$$E_k = \frac{1}{2}m_o\left(\frac{dH}{dp}\right)\left(\frac{dH'}{dp'}\right) \qquad 32.84$$

Os momentos p e p' podem ser escritos em função das massas $m = m(v)$ e $m' = m'(v')$ variáveis com as velocidades v e v' ou em função da massa de repouso m_o:

$$\frac{E}{c^2} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m \rightarrow p = mv = \frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_o v' \rightarrow m_o = \frac{p}{v'} \qquad 32.85$$

$$\frac{E\prime}{c^2} = \frac{m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = m' \rightarrow p' = m'v' = \frac{m_o v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = m_o v \rightarrow m_o = \frac{p\prime}{v} \qquad 32.86$$

Com 85 e 86 obtemos a conhecida invariância da energia cinética:

$$m_o = \frac{p}{v'} = \frac{p'}{v} \rightarrow vp = v'p' \rightarrow E_k = E'_k = \frac{1}{2}vp = \frac{1}{2}v'p' \qquad 32.87$$

Com 87 escrevemos a energia cinética para o observador O e observador O' na forma:

$$E_k = \frac{1}{2}vp = \frac{1}{2}v\frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{2}vmv = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2\frac{m}{m} = \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} \qquad 32.88$$

$$E'_k = \frac{1}{2}v'p' = \frac{1}{2}v'\frac{m_o v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{1}{2}v'm'v' = \frac{1}{2}m'v'^2 = \frac{1}{2}m'v'^2\frac{m\prime}{m\prime} = \frac{1}{2}\frac{(m\prime v\prime)^2}{m\prime} = \frac{1}{2}\frac{p\prime^2}{m\prime} \qquad 32.89$$

Com 87 escrevemos a energia cinética para o observador O e observador O' na forma:

$$E_k = \frac{1}{2}vp = \frac{1}{2}vmv = \frac{1}{2}v\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v = \frac{1}{2}m_o v\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{2}m_o vv' \qquad 32.90$$

$$E'_k = \frac{1}{2}v'p' = \frac{1}{2}v'm'v' = \frac{1}{2}v'\frac{m_o}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}v' = \frac{1}{2}m_o v'\frac{v\prime}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{1}{2}m_o v'v \qquad 32.91$$

De 87, 90 e 91 resulta a forma geral da energia cinética:

$$E_k = E'_k = \frac{1}{2}m_o vv' = \frac{1}{2}m_o v'v \qquad 32.92$$

Aplicando 88 e 89 em 32.50 e 32.51 obtemos as Hamiltonianas funções de $H = H(p, q)$ e $H' = H(p', q)$:

$$H = H(p, q) = E_k + E_p = \frac{1}{2}vp + E_p = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + E_p \qquad 32.93$$

$$H' = H(p', q) = E_k + E_p = \frac{1}{2}v'p' + E_p = \frac{1}{2}\frac{p\prime^2}{m\prime} + E_p \qquad 32.94$$

Derivando H e H' de 93 e 94 em relação à p e a p' obtemos:

$$\frac{dH}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{2}\frac{p^2}{m}\right) = \frac{1}{2}\frac{2p}{m} = \frac{p}{m} = v \qquad \frac{dm}{dp} = \text{zero} \qquad 32.95$$

$$\frac{dH}{dp} = \frac{d}{dp\prime}\left(\frac{1}{2}\frac{p\prime^2}{m\prime}\right) = \frac{1}{2}\frac{2p\prime}{m\prime} = \frac{p\prime}{m\prime} = v' \qquad \frac{dm\prime}{dp\prime} = \text{zero} \qquad 32.96$$

Os resultados de 95 e 96 estão de acordo com a teoria de Hamilton o que demonstra que fazer $\frac{dm}{dp} = \text{zero}$ e $\frac{dm'}{dp'} = \text{zero}$ está correto, já que as massas são funções explicita somente das velocidades e portanto não é necessário a aproximação de 32.57 .

Aplicando 95 e 96 em 84 obtemos a forma geral da energia cinética 92:

$$E_k = \frac{1}{2}m_o\left(\frac{dH}{dp}\right)\left(\frac{dH'}{dp'}\right) = \frac{1}{2}m_o vv' \qquad 32.97$$

Ser o resultado de 97 igual ao de 92 demonstra que fazer $\frac{dm}{dp} = \text{zero}$ e $\frac{dm'}{dp'} = \text{zero}$ está correto e é coerente com a Relatividade Ondulatória.
A energia cinética de 88 e 89 da Relatividade Ondulatória diferencia da energia cinética de 80 da Mecânica Quântica, somente devido à correção da massa devido à velocidade.
Escrevendo 30.32:

$$E_k = \frac{c}{2}\sqrt{p^2 - m_0^2 v^2} \qquad 32.98$$

Se em 98 aplicamos $p' = \frac{m_0 v\prime}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = m_0 v$ (86) resulta:

$$E_k = \frac{c}{2}\sqrt{p^2 - m_0^2 v^2} = \frac{c}{2}\sqrt{p^2 - p'^2} \qquad 32.99$$

Remodelando 99 e escrevendo na forma vetorial obtemos:

$$E_k = \frac{c}{2}\sqrt{p^2 - p'^2} \rightarrow \left(\frac{2E_k}{c}\right)^2 = p^2 - p'^2 \rightarrow \vec{p} = p'\hat{\imath} + \frac{2E_k}{c}\hat{\jmath} \qquad 32.100$$

A equação 100 nos diz que a energia cinética flui entre os observadores O e O' como se fosse uma entidade vetorial.

Sendo os momentos $p = p(v)$ e $p' = p'(v)$ função da mesma velocidade então a absorção de energia pela partícula resulta em um desvio na trajetória da mesma ou é a causa do movimento ondulatório da partícula.

§ 33 Energia Hiperbólica Relativista

Na sequencia vamos concluir que a energia relativística é uma função hiperbólica.

Da energia de 30.9 obtemos:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \qquad 33.1$$

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \rightarrow E^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4 \qquad 33.2$$

$$(E + cp)(E - cp) = m_0 c^2 . m_0 c^2 \qquad 33.3$$

$$\frac{(E+cp)}{m_0 c^2} . \frac{(E-cp)}{m_0 c^2} = 1 \qquad 33.4$$

Nesta denominando:

$$\eta = e^{\emptyset} = \frac{(E+c\ \ )}{m_0 c^2} = \frac{\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{c m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)}} = \sqrt{\frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\right)}} \qquad 33.5$$

$$\emptyset = \ln\left[\sqrt{\frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\right)}}\right] \qquad 33.6$$

$$\mu = e^{-\emptyset} = \frac{(E-cp)}{m_0 c^2} = \frac{\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{c m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)}} = \sqrt{\frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\left(1+\frac{v}{c}\right)}} \qquad 33.7$$

$$-\emptyset = \ln\left[\sqrt{\frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\left(1+\frac{v}{c}\right)}}\right] \qquad 33.8$$

$e^{\emptyset} . e^{-\emptyset} = 1$ Que esta de acordo com 4. 33.9

Agora denominando o cosseno hiperbólico (ch) como:

$$x = ch\emptyset = \frac{e^{\emptyset} + e^{-\emptyset}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{(E+cp)}{m_0 c^2} + \frac{(E-cp)}{m_0 c^2}\right] = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{1}{m_0 c^2}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\eta+\mu}{2} \qquad 33.10$$

E denominando o seno hiperbólico (sh) como:

$$y = \mathrm{sh}\emptyset = \frac{e^{\emptyset}-e^{-\emptyset}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{(E+c\ \ )}{m_0c^2} - \frac{(E-cp)}{m_0c^2}\right] = \frac{cp}{m_0c^2} = \frac{1}{m_0c^2}\frac{cm_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\eta-\mu}{2} \qquad 33.11$$

Para provar que o cosseno e o seno estão de acordo com a equação da hipérbole façamos o cosseno igual ao x e o seno igual ao y da equação da hipérbole 12:

$$x^2 - y^2 = 1 \qquad 33.12$$

$$\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2 - \left(\frac{cp}{m_0c^2}\right)^2 = \frac{E^2-c^2p^2}{m_0^2c^4} = \frac{m_0^2c^4}{m_0^2c^4} = 1 \qquad 33.13$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 - \left(\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 \qquad 33.14$$

Como $e^{\emptyset}$ e $e^{-\emptyset}$ são sempre positivos o cosseno hiperbólico é sempre maior que zero:

$$x = \mathrm{ch}\emptyset = \frac{e^{\emptyset}+e^{-\emptyset}}{2} = \frac{E}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > \text{zero} \qquad 33.15$$

Portanto não existe energia negativa.

Agora definindo a tangente, cotangente secante e cossecante hiperbólicos têm:

$$\mathrm{th}\emptyset = \frac{\mathrm{sh}\emptyset}{\mathrm{ch}\emptyset} = \frac{e^{\emptyset}-e^{-\emptyset}}{e^{\emptyset}+e^{-\emptyset}} = \frac{\frac{cp}{m_0c^2}}{\frac{E}{m_0c^2}} = \frac{cp}{E} = \frac{\frac{cm_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{v}{c} \qquad 33.16$$

$$\mathrm{coth}\emptyset = \frac{\mathrm{ch}\emptyset}{\mathrm{sh}\emptyset} = \frac{e^{\emptyset}+e^{-\emptyset}}{e^{\emptyset}-e^{-\emptyset}} = \frac{\frac{E}{m_0c^2}}{\frac{cp}{m_0c^2}} = \frac{E}{cp} = \frac{\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\frac{cm_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{c}{v} \qquad 33.17$$

$$\mathrm{sech}\emptyset = \frac{1}{\mathrm{ch}\emptyset} = \frac{2}{e^{\emptyset}+e^{-\emptyset}} = \frac{1}{\frac{E}{m_0c^2}} = \frac{m_0c^2}{E} = \frac{m_0c^2}{\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad 33.18$$

$$\mathrm{cossech}\emptyset = \frac{1}{\mathrm{sh}\emptyset} = \frac{2}{e^{\emptyset}-e^{-\emptyset}} = \frac{1}{\frac{cp}{m_0c^2}} = \frac{m_0c^2}{cp} = \frac{m_0c^2}{\frac{cm_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{c}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad 33.19$$

Construção das relações que transformam as funções hiperbólicas nas funções trigonométricas.

A fórmula de Pitágoras para um triângulo retângulo de hipotenusa “h” e de lado “a” adjacente ao ângulo α e de lado “b” oposto ao ângulo α è:

$$h^2 = a^2 + b^2 \qquad 33.20$$

Para este triângulo temos as seguintes funções trigonométricas $ft = ft(\alpha)$ de ângulo α:

$$a = h.cos\alpha \qquad b = h.sin\alpha \qquad 33.21$$

Remodelando a fórmula de Pitágoras resulta:

$$h^2 = a^2 + b^2 \to b^2 = h^2 - a^2 = (h+a)(h-a) \to \left(\frac{h+a}{b}\right)\left(\frac{h-a}{b}\right) = e^{\emptyset}e^{-\emptyset} = 1 \qquad 33.22$$

Esta se divide nas seguintes funções hiperbólicas $fh = fh(\emptyset)$ de ângulo $\emptyset$:

$$e^{\emptyset} = \frac{h+a}{b} > zero \qquad 33.23$$

$$e^{-\emptyset} = \frac{h-a}{b} > zero \qquad 33.24$$

Onde aplicando as funções trigonométricas obtemos $fh(\emptyset) = ft(\alpha)$:

$$e^{\emptyset} = \frac{h+a}{b} = \frac{h+h.cos\alpha}{h.sin\alpha} = \frac{1+cos\alpha}{sin\alpha} \qquad 33.25$$

$$e^{-\emptyset} = \frac{h-a}{b} = \frac{h-h.cos\alpha}{h.sin\alpha} = \frac{1-cos}{sin\alpha} \qquad 33.26$$

A real igualdade das funções $fh(\emptyset) = ft(\alpha)$ só ocorre se o ângulo da função hiperbólica é igual ao ângulo da função trigonométrica, ou seja, se $fh(\emptyset) = ft(\emptyset)$ onde ambas são funções hiperbólica ou $fh(\alpha) = ft(\alpha)$ onde ambas são funções trigonométricas.

Da trigonometria temos:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{sin\alpha}{1+cos\alpha} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos}} \qquad 33.27$$

Aplicando 27 obtemos a função fundamental do ângulo α trigonométrico em função do ângulo $\emptyset$ hiperbólico $\alpha = \alpha(\emptyset)$:

$$e^{\emptyset} = \frac{1+cos}{sin\alpha} = \frac{1}{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}} = \sqrt{\frac{1+c}{1-cos}} \qquad 33.28$$

$$e^{-\emptyset} = \frac{1-cos\alpha}{sin\alpha} = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}} \qquad 33.29$$

$$\alpha = \alpha(\emptyset) = 2arctg\left(e^{-\emptyset}\right) \qquad 33.30$$

A substituição do ângulo 30 $\alpha = \alpha(\emptyset)$ nas funções trigonométricas a transforma em funções hiperbólicas com as devidas restrições de existência, na seguinte forma:

$$fh(\emptyset) = ft(\alpha) = ft[\alpha(\emptyset)] = ft(\emptyset) \to fh(\emptyset) = ft(\emptyset) \qquad 33.31$$

De 28 e 29 obtemos as fórmulas fundamentais do ângulo $\emptyset$ hiperbólico em função do ângulo α trigonométrico $\emptyset = \emptyset(\alpha)$:

$$ln\left(e^{\emptyset}\right) = ln\left[\frac{1}{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \to \emptyset = \emptyset(\alpha) = ln\left[\frac{1}{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \qquad 33.32$$

$$ln(e^{-\emptyset}) = ln\left[tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \rightarrow -\emptyset = ln\left[tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \rightarrow \emptyset = \emptyset(\alpha) = ln\left[\frac{1}{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \qquad 33.33$$

De 30 obtemos: $\alpha = \alpha(\emptyset) = 2arctg(e^{-\emptyset}) = 2arctg\left[tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = 2\frac{\alpha}{2} = \alpha$

De 33 obtemos: $\emptyset = \emptyset(\alpha) = ln\left[\frac{1}{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] = ln\left[\frac{1}{tg\left(arctg(e^{-\emptyset})\right)}\right] = ln\left(\frac{1}{e^{-\emptyset}}\right) = ln(e^{\emptyset}) = \emptyset lne = \emptyset$

As funções (30) $\alpha = \alpha(\emptyset)$ e (32) $\emptyset = \emptyset(\alpha)$ são inversas uma da outra.

A substituição do ângulo 32 $\emptyset = \emptyset(\alpha)$ nas funções hiperbólicas a transforma em funções trigonométricas com as devidas restrições de existência, na seguinte forma:

$$ft(\alpha) = fh(\emptyset) = fh\,[\emptyset(\alpha)] = fh(\alpha) \rightarrow ft(\alpha) = fh(\alpha) \qquad 33.34$$

Na hipérbole unitária $\mathrm{x}^2 - y^2 = 1$ aplicando as funções $\mathrm{x} = \mathrm{ch}\emptyset$ e $\mathrm{y} = \mathrm{sh}\emptyset$ obtemos:

$$\mathrm{x}^2 - y^2 = \mathrm{ch}^2\emptyset - \mathrm{sh}^2\emptyset = (\mathrm{ch}\emptyset + \mathrm{sh}\emptyset)(\mathrm{ch}\emptyset - \mathrm{sh}\emptyset) = e^{\emptyset}.e^{-\emptyset} = 1 \qquad 33.35$$

Desmembrando-a em duas funções resultam as funções cosseno hiperbólico "$\mathrm{ch}\emptyset$" e seno hiperbólico "$\mathrm{sh}\emptyset$":

$$\mathrm{ch}\emptyset + \mathrm{sh}\emptyset = e^{\emptyset} \rightarrow x = \mathrm{ch}\emptyset = \frac{e^{\emptyset}+e^{-\emptyset}}{2} \qquad 33.36$$

$$\mathrm{ch}\emptyset - \mathrm{sh}\emptyset = e^{-\emptyset} \rightarrow y = \mathrm{sh}\emptyset = \frac{e^{\emptyset}-e^{-\emptyset}}{2} \qquad 33.37$$

Em 36 e 37 temos as fundamentais funções hiperbólicas.

Aplicando no cosseno $ch\emptyset$ hiperbólico as relações anteriores obtemos:

$$x = ch\emptyset = \frac{e^{\emptyset}+e^{-\emptyset}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{h+a}{b} + \frac{h-a}{b}\right) = \frac{h}{b} = \frac{h}{h.sen\alpha} = \frac{1}{sen\alpha} = cosec\alpha \qquad 33.38$$

Aplicando no seno $sh\emptyset$ hiperbólico as relações anteriores obtemos:

$$y = sh\emptyset = \frac{e^{\emptyset}-e^{-\emptyset}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{h+a}{b} - \frac{h-a}{b}\right) = \frac{a}{b} = \frac{h.cos\alpha}{h.sen\alpha} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = cotg\alpha \qquad 33.39$$

Aplicando o cosseno $x = ch\emptyset = cosec\alpha$ hiperbólico e o seno $y = sh\emptyset = cotg\alpha$ hiperbólico na equação da hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$ obtemos:

$$x^2 - y^2 = ch^2\emptyset - sh^2\emptyset = cosec^2\alpha - cotg^2\alpha = 1 \qquad 33.40$$

Que é um resultado da trigonometria.

Com as relações do cosseno $ch\emptyset$ hiperbólico e do seno $sh\emptyset$ hiperbólico podemos definir as demais relações entre as funções trigonométricas e as funções hiperbólicas:

$$tgh\emptyset = \frac{sh\emptyset}{ch\emptyset} = \frac{\frac{cos\alpha}{sen\alpha}}{\frac{1}{sen\alpha}} = cos\alpha \qquad 33.41$$

$$cotgh\emptyset = \frac{ch\emptyset}{sh\emptyset} = \frac{\frac{1}{sen\alpha}}{\frac{cos\alpha}{sen\alpha}} = \frac{1}{cos\alpha} = sec\alpha \qquad 33.42$$

$$sech\emptyset = \frac{1}{ch\emptyset} = \frac{1}{\frac{1}{sen\alpha}} = sen\alpha \qquad 33.43$$

$$cosech\emptyset = \frac{1}{sh\emptyset} = \frac{1}{\frac{cos\alpha}{sen\alpha}} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha \qquad 33.44$$

$$sech^2\emptyset + tgh^2\emptyset = sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \qquad 33.45$$

$$cotgh^2\emptyset - cosech^2\emptyset = sec^2\alpha - tg^2\alpha = 1 \qquad 33.46$$

Construção das já conhecidas relações que transformam as funções hiperbólicas na forma exponencial de um número complexo.

A seguir utilizaremos as fórmulas de Euler:

$e^{i\alpha} = cos\alpha + isen\alpha \qquad e^{-i\alpha} = cos\alpha - isen\alpha$ 33.47

Remodelando a fórmula de Pitágoras obtemos:

$h^2 = a^2 + b^2 = a^2 - (ib)^2 = (a + ib)(a - ib) \rightarrow \frac{(a+ib)}{h}\frac{(a-ib)}{h} = e^{\emptyset}e^{-\emptyset} = 1$ 33.48

Esta se divide nas seguintes funções hiperbólicas complexas:

$e^{\emptyset} = \frac{a+ib}{h} > zero$ 33.49

$e^{-\emptyset} = \frac{a-ib}{h} > zero$ 33.50

Para este triângulo temos as relações trigonométricas:

$\frac{a}{h} = cos\alpha \qquad \frac{b}{h} = sen\alpha$ 33.51

Aplicando as relações trigonométricas obtemos:

$e^{\emptyset} = \frac{a+ib}{h} = \frac{a}{h} + i\frac{b}{h} = cos\alpha + isen\alpha$ 33.52

$e^{-\emptyset} = \frac{a-ib}{h} = \frac{a}{h} - i\frac{b}{h} = cos\alpha - isen\alpha$ 33.53

Para estar de acordo com as formulas de Euler devemos alterar os argumentos hiperbólicos para $\emptyset = i\alpha$ e assim obtemos as funções hiperbólicas escritas como a forma exponencial de um número complexo:

$e^{\emptyset} = e^{i\alpha} = cos\alpha + isen\alpha$ 33.54

$e^{-\emptyset} = e^{-i\alpha} = cos\alpha - isen\alpha$ 33.55

Denominando o cosseno $chi\alpha$ hiperbólico complexo como:

$x = chi\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i}}{2} = \frac{1}{2}[(cos\alpha + isen\alpha) + (cos\alpha - isen\alpha)] = cos\alpha$ 33.56

E denominando o seno $shi\alpha$ hiperbólico complexo como:

$y = shi\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2} = \frac{1}{2}[(cos\alpha + isen\alpha) - (cos\alpha - isen\alpha)] = isen\alpha$ 33.57

Aplicando o cosseno $x = chi\alpha = cos\alpha$ hiperbólico complexo e o seno $y = shi\alpha = isen\alpha$ hiperbólico complexo na equação da hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$ resulta:

$x^2 - y^2 = ch^2i\alpha - sh^2i\alpha = cos^2\alpha - i^2sen^2\alpha = cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$ 33.58

Que é um resultado da trigonometria.

Com as relações do cosseno $chi\alpha = cos\alpha$ hiperbólico e do seno $shi\alpha = isen\alpha$ hiperbólico podemos definir as demais relações entre as funções trigonométricas complexas e as funções hiperbólicas complexas:

Construção das relações que transformam as funções hiperbólicas nas funções trigonométricas semelhantes as que ocorrem nas funções Gudermannianas.

A fórmula de Pitágoras para um triângulo retângulo de hipotenusa “h” e de lado “a” adjacente ao ângulo α e de lado “b” oposto ao ângulo α è:

$h^2 = a^2 + b^2$ 33.59

Para este triângulo temos as relações trigonométricas:

$$a = h.cos\alpha \qquad\qquad b = h.sen\alpha \tag{33.60}$$

Remodelando a fórmula de Pitágoras resulta:

$$h^2 = a^2 + b^2 \to a^2 = h^2 - b^2 = (h+b)(h-b) \to \left(\frac{h+b}{a}\right)\left(\frac{h-b}{a}\right) = e^{\beta}.e^{-\beta} = 1 \tag{33.61}$$

Esta se divide nas seguintes funções hiperbólicas:

$$e^{\beta} = \frac{h+b}{a} > zero \tag{33.62}$$
$$e^{-\beta} = \frac{h-b}{a} > zero \tag{33.63}$$

Onde aplicando as relações trigonométricas obtemos:

$$e^{\beta} = \frac{h+b}{a} = \frac{h+h.sen\alpha}{h.cos\alpha} = \frac{1+sen\alpha}{cos\alpha} \tag{33.64}$$

$$e^{-\beta} = \frac{h-b}{a} = \frac{h-hse}{h.cos\alpha} = \frac{1-sen}{cos\alpha} \tag{33.65}$$

Destas obtemos as fórmulas fundamental do ângulo β hiperbólico:

$$ln(e^{\beta}) = ln\left(\frac{1+sen\alpha}{cos\alpha}\right) \to \beta = ln\left(\frac{1+sen\alpha}{cos\alpha}\right) \tag{33.66}$$

$$ln(e^{-\beta}) = ln\left(\frac{1-sen}{cos\alpha}\right) \to \beta = -ln\left(\frac{1-sen\alpha}{cos\alpha}\right) \tag{33.67}$$

Denominando o cosseno $ch\beta$ hiperbólico como:

$$x = ch\beta = \frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{h+b}{a} + \frac{h-b}{a}\right) = \frac{h}{a} = \frac{h}{h.cos\alpha} = \frac{1}{cos\alpha} = sec\alpha \tag{33.68}$$

E denominando o seno $sh\beta$ hiperbólico como:

$$y = sh\beta = \frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{h+b}{a} - \frac{h-b}{a}\right) = \frac{b}{a} = \frac{h.sen\alpha}{h.cos\alpha} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha \tag{33.69}$$

Aplicando o cosseno $x = ch\beta = sec\alpha$ hiperbólico e o seno $y = sh\beta = tg\alpha$ hiperbólico na equação da hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$ obtemos:

$$x^2 - y^2 = ch^2\beta - sh^2\beta = sec^2\alpha - tg^2\alpha = 1 \tag{33.70}$$

Que é um resultado da trigonometria.

Com as relações do cosseno $ch\beta$ hiperbólico e do seno $sh\beta$ hiperbólico podemos definir as demais relações entre as funções trigonométricas e as funções hiperbólicas:

$$tgh\beta = \frac{sh\beta}{ch\beta} = \frac{\frac{sen\alpha}{cos\alpha}}{\frac{1}{cos\alpha}} = sen\alpha \tag{33.71}$$

$$cotgh\beta = \frac{ch\beta}{sh\beta} = \frac{\frac{1}{cos\alpha}}{\frac{sen\alpha}{cos\alpha}} = \frac{1}{sen\alpha} = cosec\alpha \tag{33.72}$$

$$sech\beta = \frac{1}{ch\beta} = \frac{1}{\frac{1}{cos\alpha}} = cos\alpha \tag{33.73}$$

$$cosech\beta = \frac{1}{sh\beta} = \frac{1}{\frac{sen\alpha}{cos\alpha}} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = cotg\alpha \tag{33.74}$$

$$sech^2\beta + tgh^2\beta = cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \tag{33.75}$$

$$cotgh^2\beta - cosech^2\beta = cosec^2\alpha - cotg^2\alpha = 1 \tag{33.76}$$

§34 **Equações hiperbólicas similares às equações de** Paul Adrien Maurice Dirac

No que segue estamos sempre tratando de partícula livre $\mathrm{E}_p = zero$.

Escrevendo a equação relativística da energia 30.9:

$$\mathrm{E} = \mathrm{c}\sqrt{\mathrm{m}_0^2\mathrm{c}^2 + \mathrm{p}^2} \rightarrow \mathrm{E}^2 = \mathrm{c}^2\mathrm{p}^2 + \mathrm{m}_0^2\mathrm{c}^4 \qquad 34.1$$

$$\mathrm{E}^2 = \mathrm{c}^2\mathrm{p}_x^2 + \mathrm{c}^2\mathrm{p}_y^2 + \mathrm{c}^2\mathrm{p}_z^2 + \mathrm{m}_0^2\mathrm{c}^4 \qquad \mathrm{p}^2 = \mathrm{p}_x^2 + \mathrm{p}_y^2 + \mathrm{p}_z^2 \qquad 34.2$$

$$\frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{c}^2} = \mathrm{p}_x^2 + \mathrm{p}_y^2 + \mathrm{p}_z^2 + \mathrm{m}_0^2\mathrm{c}^2 \qquad 34.3$$

Dirac propôs que do produto das duas seguintes equações resulte 3.

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{c}} = \alpha_1\mathrm{p}_x + \alpha_2\mathrm{p}_y + \alpha_3\mathrm{p}_z + \alpha_4\mathrm{m}_0\mathrm{c} \qquad 34.4$$
$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{c}} = \alpha_1\mathrm{p}_x + \alpha_2\mathrm{p}_y + \alpha_3\mathrm{p}_z + \alpha_4\mathrm{m}_0\mathrm{c} \qquad 34.5$$

Fazendo o produto de 4x5 obtemos:

$$\frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{c}^2} = \alpha_1\alpha_1\mathrm{p}_x\mathrm{p}_x + \alpha_2\alpha_1\mathrm{p}_x\mathrm{p}_y + \alpha_3\alpha_1\mathrm{p}_x\mathrm{p}_z + \mathrm{m}_0\mathrm{c}\alpha_4\alpha_1\mathrm{p}_x + \alpha_1\alpha_2\mathrm{p}_x\mathrm{p}_y + \alpha_2\alpha_2\mathrm{p}_y\mathrm{p}_y +$$
$$\alpha_3\alpha_2\mathrm{p}_y\mathrm{p}_z + \mathrm{m}_0\mathrm{c}\alpha_4\alpha_2\mathrm{p}_y + \alpha_1\alpha_3\mathrm{p}_x\mathrm{p}_z + \alpha_2\alpha_3\mathrm{p}_y\mathrm{p}_z + \alpha_3\alpha_3\mathrm{p}_z\mathrm{p}_z + \mathrm{m}_0\mathrm{c}\alpha_4\alpha_3\mathrm{p}_z + \qquad 34.6$$
$$\mathrm{m}_0\mathrm{c}\alpha_1\alpha_4\mathrm{p}_x + \mathrm{m}_0\mathrm{c}\alpha_2\alpha_4\mathrm{p}_y + \mathrm{m}_0\mathrm{c}\alpha_3\alpha_4\mathrm{p}_z + \mathrm{m}_0\mathrm{c}\mathrm{m}_0\mathrm{c}\alpha_4\alpha_4.$$

Para que 6 seja igual a 3 deverá cumprir as seguinte exigências:

$$i = k \rightarrow \alpha_i^2 = \alpha_k^2 = 1 \qquad 34.7$$

$$i \neq k \rightarrow \alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = \mathrm{zero} \qquad 34.8$$

Desmembrando o produto 6 em duas equações obtemos 9 e 15:

$$\mathrm{p}^2 = \alpha_1\alpha_1\mathrm{p}_x\mathrm{p}_x + \alpha_2\alpha_2\mathrm{p}_y\mathrm{p}_y + \alpha_3\alpha_3\mathrm{p}_z\mathrm{p}_z + (\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2)\mathrm{p}_x\mathrm{p}_y +$$
$$(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3)\mathrm{p}_x\mathrm{p}_z + (\alpha_3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3)\mathrm{p}_y\mathrm{p}_z. \qquad 34.9$$

Nesta se as matrizes que representam os α_k estiverem de acordo com 7 e 8 teremos:

$$\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 = zero \qquad 34.10$$

$$\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3 = zero \qquad 34.11$$

$$\alpha_3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 = zero \qquad 34.12$$

$$\alpha_1\alpha_1 = \alpha_2\alpha_2 = \alpha_3\alpha_3 = 1 \qquad 34.13$$

Com isso resulta de 9:

$$\mathrm{p}^2 = \mathrm{p}_x^2 + \mathrm{p}_y^2 + \mathrm{p}_z^2 \qquad 34.14$$

O restante do produto 6 è:

$$\mathrm{m}_0^2\mathrm{c}^2 = (\alpha_4\alpha_1 + \alpha_1\alpha_4)\mathrm{p}_x\mathrm{m}_0\mathrm{c} + (\alpha_4\alpha_2 + \alpha_2\alpha_4)\mathrm{p}_y\mathrm{m}_0\mathrm{c} + (\alpha_4\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4)\mathrm{p}_z\mathrm{m}_0\mathrm{c} \qquad 34.15$$
$$+\alpha_4\alpha_4\mathrm{m}_0\mathrm{c}\mathrm{m}_0\mathrm{c}.$$

Nesta se as matrizes que representam os α_k estiverem de acordo com 7 e 8 teremos:

$$\alpha_4\alpha_1 + \alpha_1\alpha_4 = zero \qquad 34.16$$

$$\alpha_4\alpha_2 + \alpha_2\alpha_4 = zero \qquad 34.17$$

$$\alpha_4\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 = zero \qquad 34.18$$

$\alpha_4\alpha_4 = 1$ 34.19

Com isso resulta de 15:

$m_0^2c^2 = m_0cm_0c$ 34.20

E temos como resultado final 6 igual a 3.

As denominadas matrizes de Dirac α_k são:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 34.21$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \quad 34.22$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad 34.23$$

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 34.24$$

Façamos as operações de 10 a 13:

$$\alpha_2\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \quad 34.25$$

$$\alpha_1\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} \quad 34.26$$

$$\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 34.27$$

$$\alpha_3\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad 34.28$$

$$\alpha_1\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 34.29$$

$$\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 34.30$$

$$\alpha_3\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad 34.31$$

$$\alpha_2\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \tag{34.32}$$

$$\alpha_3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34.33}$$

$$\alpha_1\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{34.34}$$

$$\alpha_2\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{34.35}$$

$$\alpha_3\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{34.36}$$

E as exigências de 10 a 13 estão cumpridas:

Façamos as operações de 16 a 19:

$$\alpha_4\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34.37}$$

$$\alpha_1\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34.38}$$

$$\alpha_4\alpha_1 + \alpha_1\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34.39}$$

$$\alpha_4\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34.40}$$

$$\alpha_2\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34.41}$$

$$\alpha_4\alpha_2 + \alpha_2\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34.42}$$

$$\alpha_4\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34.43}$$

$$\alpha_3\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34.44}$$

$$\alpha_4\alpha_3+\alpha_3\alpha_4=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad 34.45$$

$$\alpha_4\alpha_4=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad 34.46$$

E as exigências de 16 a 19 estão cumpridas:

Portanto aplicando as exigências 7 e 8 no produto resulta 4x5 = 3:

$$\frac{E^2}{c^2}=p_x^2+p_y^2+p_z^2+m_0^2c^2=\left\{\frac{E}{c}=\alpha_1p_x+\alpha_2p_y+\alpha_3p_z+\alpha_4m_0c\right\}x\left\{\frac{E}{c}=\alpha_1p_x+\alpha_2p_y+\alpha_3p_z+\alpha_4m_0c\right\} \qquad 34.47$$

Na forma de matriz o produto de 4x5 é igual a:

$$\frac{E^2}{c^2}=[p_x \quad p_y \quad p_z \quad m_0c]\begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_1&\alpha_1\alpha_2&\alpha_1\alpha_3&\alpha_1\alpha_4\\\alpha_2\alpha_1&\alpha_2\alpha_2&\alpha_2\alpha_3&\alpha_2\alpha_4\\\alpha_3\alpha_1&\alpha_3\alpha_2&\alpha_3\alpha_3&\alpha_3\alpha_4\\\alpha_4\alpha_1&\alpha_4\alpha_2&\alpha_4\alpha_3&\alpha_4\alpha_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_x\\p_y\\p_z\\m_0c\end{bmatrix} \qquad 34.48$$

Nesta temos:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]=\begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_1&\alpha_1\alpha_2&\alpha_1\alpha_3&\alpha_1\alpha_4\\\alpha_2\alpha_1&\alpha_2\alpha_2&\alpha_2\alpha_3&\alpha_2\alpha_4\\\alpha_3\alpha_1&\alpha_3\alpha_2&\alpha_3\alpha_3&\alpha_3\alpha_4\\\alpha_4\alpha_1&\alpha_4\alpha_2&\alpha_4\alpha_3&\alpha_4\alpha_4\end{bmatrix} \qquad 34.49$$

E aplicando 49 em 48 obtemos:

$$\frac{E^2}{c^2}=[p_x \quad p_y \quad p_z \quad m_0c]\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]\begin{bmatrix}p_x\\p_y\\p_z\\m_0c\end{bmatrix} \qquad 34.50$$

Desmembrando obtemos 4 ou o que é o mesmo 5:

$$\frac{E}{c}=[p_x \quad p_y \quad p_z \quad m_0c]\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}=\alpha_1p_x+\alpha_2p_y+\alpha_3p_z+\alpha_4m_0c \qquad 34.51$$

$$\frac{E}{c}=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]\begin{bmatrix}p_x\\p_y\\p_z\\m_0c\end{bmatrix}=\alpha_1p_x+\alpha_2p_y+\alpha_3p_z+\alpha_4m_0c \qquad 34.52$$

Isolando a energia em 52 obtemos:

$$E=\alpha_1cp_x+\alpha_2cp_y+\alpha_3cp_z+\alpha_4m_0c^2 \qquad 34.53$$

Apliquemos as matrizes α_k em 53:

$$E=\alpha_1cp_x+\alpha_2cp_y+\alpha_3cp_z+\alpha_4cm_0c^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}cp_x+\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{bmatrix}cp_y+\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}cp_z+\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}m_0c^2 \qquad 34.54$$

$$E=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}cp_x+\begin{bmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{bmatrix}cp_y+\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}cp_z+\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}m_0c^2 \qquad 34.55$$

Nesta devemos escrever tudo em forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{E} \\ E \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{cp_x} \\ c\mathrm{p_x} \\ \mathrm{cp_x} \\ \mathrm{cp_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{cp_y} \\ \mathrm{cp_y} \\ \mathrm{cp_y} \\ \mathrm{cp_y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{cp_z} \\ c\mathrm{p_z} \\ \mathrm{cp_z} \\ c\mathrm{p_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m_0c^2} \\ \mathrm{m_0c^2} \\ \mathrm{m_0c^2} \\ \mathrm{m_0c^2} \end{bmatrix} \qquad 34.56$$

Nesta substituindo os seguintes operadores quânticos obtemos:

$$\mathrm{E} = \mathrm{H} = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \qquad \mathrm{p_x} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \qquad \mathrm{p_y} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \qquad \mathrm{p_z} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \qquad 34.57$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial}{\partial x} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial}{\partial x} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial}{\partial x} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial}{\partial y} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial}{\partial y} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial}{\partial y} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial}{\partial z} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial}{\partial z} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial}{\partial z} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m_0c^2} \\ \mathrm{m_0c^2} \\ \mathrm{m_0c^2} \\ \mathrm{m_0c^2} \end{bmatrix} \qquad 34.58$$

Multiplicando respectivamente cada nível por $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ obtemos:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} \\ \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} \\ \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_3}{\partial t} \\ \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_4}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial\Psi_3}{\partial x} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial\Psi_4}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial\Psi_1}{\partial y} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial\Psi_2}{\partial y} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial\Psi_3}{\partial y} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial\Psi_4}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial\Psi_1}{\partial z} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial\Psi_2}{\partial z} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial\Psi_3}{\partial z} \\ -\mathrm{i}\hbar c\frac{\partial\Psi_4}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m_0c^2}\Psi_1 \\ \mathrm{m_0c^2}\Psi_2 \\ \mathrm{m_0c^2}\Psi_3 \\ \mathrm{m_0c^2}\Psi_4 \end{bmatrix} \qquad 34.59$$

Deste produto matricial resultam as seguintes equações de Dirac:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = -\mathrm{i}\hbar c\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial\Psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\right) - \mathrm{m_0c^2}\Psi_4 \qquad 34.60$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = -\mathrm{i}\hbar c\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial\Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right) + \mathrm{m_0c^2}\Psi_3 \qquad 34.61$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_3}{\partial t} = -\mathrm{i}\hbar c\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial\Psi_4}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_3}{\partial z}\right) + \mathrm{m_0c^2}\Psi_2 \qquad 34.62$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_4}{\partial t} = -\mathrm{i}\hbar c\left(\frac{\partial\Psi_3}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial\Psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_4}{\partial z}\right) - \mathrm{m_0c^2}\Psi_1 \qquad 34.63$$

Equações hiperbólicas correspondentes às equações 60 a 63 de Dirac

No que segue estamos sempre tratando de partícula livre $\mathrm{E}_p = zero$.

Da equação da energia 30.9 obtemos:

$$\mathrm{E} = \mathrm{c}\sqrt{\mathrm{p^2 + m_0^2c^2}} \rightarrow \frac{\mathrm{E^2}}{\mathrm{c^2}} - \mathrm{p^2} = \mathrm{m_0^2c^2} \qquad 34.64$$

$$\frac{\mathrm{E^2}}{\mathrm{c^2}} - \mathrm{p^2} = \mathrm{m_0^2c^2} = \left(\frac{\mathrm{E}}{c} + \mathrm{p}\right).\left(\frac{\mathrm{E}}{c} - \mathrm{p}\right) = \mathrm{m_0c.m_0c} \qquad 34.65$$

$$\frac{\left(\frac{\mathrm{E}}{c}+\mathrm{p}\right)}{\mathrm{m_0c}}.\frac{\left(\frac{\mathrm{E}}{c}-\mathrm{p}\right)}{\mathrm{m_0c}} = \mathrm{e}^{\emptyset}.\mathrm{e}^{-\emptyset} = 1 \qquad 34.66$$

Que desmembrada em duas equações resulta:

$$\frac{\mathrm{E}}{c} = \mathrm{p} + \mathrm{m_0ce}^{-\emptyset} \qquad 34.67$$

$$\frac{\mathrm{E}}{c} = -\mathrm{p} + \mathrm{m_0ce}^{\emptyset} \qquad 34.68$$

Nestas aplicando $p = \alpha_1\mathrm{p_x} + \alpha_2\mathrm{p_y} + \alpha_3\mathrm{p_z}$ 34.69

Observação os coeficientes hiperbólicos $\mathrm{e}^{\emptyset}$ e $\mathrm{e}^{-\emptyset}$ já desmembram o termo $\mathrm{m_0^2c^2}$ em duas frações tornando desnecessário o coeficiente α_4.

$\frac{\mathrm{E}}{c} = \alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z + m_0 c e^{-\emptyset}$ 34.70

$\frac{\mathrm{E}}{c} = -\alpha_1 p_x - \alpha_2 p_y - \alpha_3 p_z + m_0 c e^{\emptyset}$ 34.71

O produto de ambas deve resulta em:

$\frac{\mathrm{E}^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2 c^2$ 34.72

Façamos o produto de 70x71:

$$\frac{\mathrm{E}^2}{c^2} = -\alpha_1\alpha_1 p_x p_x - \alpha_2\alpha_1 p_x p_y - \alpha_3\alpha_1 p_x p_z + m_0 c e^{\emptyset}\alpha_1 p_x - \alpha_1\alpha_2 p_x p_y - \alpha_2\alpha_2 p_y p_y - \alpha_3\alpha_2 p_y p_z + m_0 c e^{\emptyset}\alpha_2 p_y - \alpha_1\alpha_3 p_x p_z - \alpha_2\alpha_3 p_y p_z - \alpha_3\alpha_3 p_z p_z + m_0 c e^{\emptyset}\alpha_3 p_z - m_0 c e^{-\emptyset}\alpha_1 p_x - m_0 c e^{-\emptyset}\alpha_2 p_y - m_0 c e^{-\emptyset}\alpha_3 p_z + m_0 c e^{\emptyset} m_0 c e^{-\emptyset}. \quad 34.73$$

Desmembrando o produto 73 em duas equações X e Y obtemos 74 e 75:

$$\mathrm{X} = -\alpha_1\alpha_1 p_x p_x - \alpha_2\alpha_2 p_y p_y - \alpha_3\alpha_3 p_z p_z - (\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2) p_x p_y - (\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3) p_x p_z - (\alpha_3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3) p_y p_z. \quad 34.74$$

O restante Y do produto 73 è:

$\mathrm{Y} = m_0 c\left(e^{\emptyset} - e^{-\emptyset}\right)\left(\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z\right) + m_0 c e^{\emptyset} m_0 c e^{-\emptyset}.$ 34.75

De 33.11 obtemos:

$sh\emptyset = \frac{e^{\emptyset} - e^{-\emptyset}}{2} = \frac{cp}{m_0 c^2} \rightarrow 2p = m_0 c\left(e^{\emptyset} - e^{-\emptyset}\right)$ 34.76

Nesta aplicando 69 obtemos:

$m_0 c\left(e^{\emptyset} - e^{-\emptyset}\right) = 2p = 2\left(\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z\right)$ 34.77

Aplicando 77 em 75 obtemos:

$\mathrm{Y} = 2\left(\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z\right)\left(\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z\right) + m_0 c e^{\emptyset} m_0 c e^{-\emptyset}.$ 34.78

Fazendo o produto obtemos:

$$\mathrm{Y} = 2\left(\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z\right)\left(\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z\right) + m_0 c e^{\emptyset} m_0 c e^{-\emptyset} = 2\begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_1 p_x p_x + \alpha_2\alpha_2 p_y p_y + \alpha_3\alpha_3 p_z p_z + (\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2) p_x p_y + \\ (\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3) p_x p_z + (\alpha_3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3) p_y p_z \end{bmatrix} + m_0 c e^{\emptyset} m_0 c e^{-\emptyset}. \quad 34.79$$

$$\mathrm{Y} = 2\alpha_1\alpha_1 p_x p_x + 2\alpha_2\alpha_2 p_y p_y + 2\alpha_3\alpha_3 p_z p_z + 2(\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2) p_x p_y + 2(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3) p_x p_z + 2(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3) p_y p_z + m_0 c e^{\emptyset} m_0 c e^{-\emptyset}. \quad 34.80$$

Somando 80 e 74 obtemos

$$\frac{\mathrm{E}^2}{c^2} = \mathrm{X} + \mathrm{Y} = -\alpha_1\alpha_1 p_x p_x - \alpha_2\alpha_2 p_y p_y - \alpha_3\alpha_3 p_z p_z - (\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2) p_x p_y - (\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3) p_x p_z - (\alpha_3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3) p_y p_z + 2\alpha_1\alpha_1 p_x p_x + 2\alpha_2\alpha_2 p_y p_y + 2\alpha_3\alpha_3 p_z p_z + 2(\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2) p_x p_y + 2(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3) p_x p_z + 2(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3) p_y p_z + m_0 c e^{\emptyset} m_0 c e^{-\emptyset} \quad 34.81$$

Simplificando obtemos:

$$\frac{\mathrm{E}^2}{c^2} = \alpha_1\alpha_1 p_x p_x + \alpha_2\alpha_2 p_y p_y + \alpha_3\alpha_3 p_z p_z + (\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2) p_x p_y + (\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3) p_x p_z + (\alpha_3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3) p_y p_z + m_0 c e^{\emptyset} m_0 c e^{-\emptyset} \quad 34.82$$

Para que 82 seja igual a 72 deverá cumprir as seguinte exigências:

$i = k \rightarrow \alpha_i^2 = \alpha_k^2 = 1$ 34.83

$i \neq k \rightarrow \alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = \text{zero}$ 34.84

Para atender as exigências de 83 e 84 devemos ter:

$\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 = zero$ 34.85

$\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3 = zero$ 34.86

$\alpha_3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 = zero$ 34.87

$\alpha_1\alpha_1 = \alpha_2\alpha_2 = \alpha_3\alpha_3 = 1$ 34.88

Com isso resulta 82 igual a 72:

$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2c^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2c^2$ 34.89

As denominadas matrizes de Pauli α_k são:

$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 34.90

$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ 34.91

$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 34.92

Façamos as operações de 85 a 88:

$\alpha_2\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ 34.93

$\alpha_1\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ 34.94

$\alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 34.95

$\alpha_3\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 34.96

$\alpha_1\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 34.97

$\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 34.98

$\alpha_3\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ 34.99

$\alpha_2\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ 34.100

$\alpha_3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 34.101

$\alpha_1\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 34.102

$\alpha_2\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 34.103

$\alpha_3\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 34.104

Portanto as exigências 83 e 84 estão atendidas e temos:

$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2c^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2c^2 = \left\{\frac{E}{c} = \alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z + m_0 c e^{-\emptyset}\right\} x \left\{\frac{E}{c} = -\alpha_1 p_x - \alpha_2 p_y - \alpha_3 p_z + m_0 c e^{\emptyset}\right\}$ 34.105

Isolando a energia em 105 obtemos:

$$\mathrm{E} = \alpha_1 c\mathrm{p_x} + \alpha_2 c\mathrm{p_y} + \alpha_3 c\mathrm{p_z} + \mathrm{m_0 c^2 e^{-\emptyset}} \qquad 34.106$$

$$\mathrm{E} = -\alpha_1 \mathrm{cp_x} - \alpha_2 c\mathrm{p_y} - \alpha_3 c\mathrm{p_z} + \mathrm{m_0 c^2 e^{\emptyset}} \qquad 34.107$$

Apliquemos as matrizes α_k e a matriz I em 106 e 107:

$$\mathrm{E} = \alpha_1 c\mathrm{p_x} + \alpha_2 \mathrm{cp_y} + \alpha_3 c\mathrm{p_z} + \mathrm{m_0 c^2 e^{-\emptyset}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{cp_x} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \mathrm{cp_y} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} c\mathrm{p_z} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{m_0 c^2 e^{-\emptyset}} \qquad 34.108$$

$$\mathrm{E} = -\alpha_1 c\mathrm{p_x} - \alpha_2 \mathrm{cp_y} - \alpha_3 c\mathrm{p_z} - \mathrm{m_0 c^2 e^{\emptyset}} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{cp_x} - \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \mathrm{cp_y} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} c\mathrm{p_z} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{m_0 c^2 e^{\emptyset}} \qquad 34.109$$

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{cp_x} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \mathrm{cp_y} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} c\mathrm{p_z} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{m_0 c^2 e^{-\emptyset}} \qquad 34.110$$

$$\mathrm{E} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{cp_x} - \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \mathrm{cp_y} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} c\mathrm{p_z} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{m_0 c^2 e^{\emptyset}} \qquad 34.111$$

Nestas devemos escrever tudo em forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} E \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{cp_x} \\ \mathrm{cp_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\mathrm{p_y} \\ c\mathrm{p_y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\mathrm{p_z} \\ c\mathrm{p_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m_0 c^2 e^{-\emptyset}} \\ \mathrm{m_0 c^2 e^{-\emptyset}} \end{bmatrix} \qquad 34.112$$

$$\begin{bmatrix} E \\ E \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{cp_x} \\ \mathrm{cp_x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\mathrm{p_y} \\ c\mathrm{p_y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\mathrm{p_z} \\ c\mathrm{p_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m_0 c^2 e^{\emptyset}} \\ \mathrm{m_0 c^2 e^{\emptyset}} \end{bmatrix} \qquad 34.113$$

Nesta substituindo os seguintes operadores quânticos obtemos:

$$\mathrm{E} = \mathrm{H} = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \qquad \mathrm{p_x} = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \qquad \mathrm{p_y} = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \qquad \mathrm{p_z} = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \qquad 34.114$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \\ \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \\ -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \\ -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m_0 c^2 e^{-\emptyset}} \\ \mathrm{m_0 c^2 e^{-\emptyset}} \end{bmatrix} \qquad 34.115$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \\ \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \\ -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \\ -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m_0 c^2 e^{\emptyset}} \\ \mathrm{m_0 c^2 e^{\emptyset}} \end{bmatrix} \qquad 34.116$$

Multiplicando respectivamente cada nível por $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ obtemos:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathrm{t}} \\ \mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathrm{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar c \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathrm{x}} \\ -\mathrm{i}\hbar c \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathrm{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathrm{y}} \\ -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathrm{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar c \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathrm{z}} \\ -\mathrm{i}\hbar c \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathrm{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m_0 c^2 e^{-\emptyset}} \Psi_1 \\ \mathrm{m_0 c^2 e^{-\emptyset}} \Psi_2 \end{bmatrix} \qquad 34.117$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mathrm{t}} \\ \mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi_4}{\partial \mathrm{t}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mathrm{x}} \\ -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial \Psi_4}{\partial \mathrm{x}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mathrm{y}} \\ -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial \Psi_4}{\partial \mathrm{y}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mathrm{z}} \\ -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \frac{\partial \Psi_4}{\partial \mathrm{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m_0 c^2 e^{\emptyset}} \Psi_3 \\ \mathrm{m_0 c^2 e^{\emptyset}} \Psi_4 \end{bmatrix} \qquad 34.118$$

Destes produtos matriciais resultam as seguintes equações hiperbólicas:

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathrm{t}} = -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathrm{x}} - \mathrm{i} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathrm{z}} \right) + \mathrm{m_0 c^2 e^{-\emptyset}} \Psi_1 \qquad 34.119$$

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathrm{t}} = -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{i} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathrm{z}} \right) + \mathrm{m_0 c^2 e^{-\emptyset}} \Psi_2 \qquad 34.120$$

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mathrm{t}} = -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \left(-\frac{\partial \Psi_4}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{i} \frac{\partial \Psi_4}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mathrm{z}} \right) + \mathrm{m_0 c^2 e^{\emptyset}} \Psi_3 \qquad 34.121$$

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi_4}{\partial \mathrm{t}} = -\mathrm{i}\hbar \mathrm{c} \left(-\frac{\partial \Psi_3}{\partial \mathrm{x}} - \mathrm{i} \frac{\partial \Psi_3}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial \mathrm{z}} \right) + \mathrm{m_0 c^2 e^{\emptyset}} \Psi_4 \qquad 34.122$$

Consideremos duas funções $\mathrm{f}(\emptyset) = \eta$ e $\mathrm{g}(\emptyset) = \mu$ inversamente proporcionais na forma:

$$\mathrm{f}(\emptyset).\mathrm{g}(\emptyset) = \eta.\mu = 1 \qquad 35.1$$

Que aplicadas na hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$ resulta:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = \eta.\mu = 1 \qquad 35.2$$

Desmembrando 2 podemos definir o cosseno hiperbólico $x = \mathrm{ch}\emptyset$ e o seno hiperbólico $y = \mathrm{sh}\emptyset$ na seguinte forma:

$$\begin{cases} x + y = \eta \to x = \mathrm{ch}\emptyset = \frac{1}{2}(\eta + \mu) \to A \\ x - y = \mu \to y = \mathrm{sh}\emptyset = \frac{1}{2}(\eta - \mu) \to B \end{cases} \qquad 35.3$$

Onde somamos A+B para obter o $\mathrm{ch}\emptyset$ e subtraímos A-B para obter o $\mathrm{sh}\emptyset$.

As funções cosseno hiperbólico $x = \mathrm{ch}\emptyset$ e seno hiperbólico $y = \mathrm{sh}\emptyset$ são as fundamentais funções hiperbólicas.

Aplicando $x = \mathrm{ch}\emptyset$ e $y = \mathrm{sh}\emptyset$ na hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$ obtemos as funções inversas:

$$x^2 - y^2 = \mathrm{ch}^2\emptyset - \mathrm{sh}^2\emptyset = \left[\frac{1}{2}(\eta + \mu)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(\eta - \mu)\right]^2 \qquad 35.4$$

$$x^2 - y^2 = \mathrm{ch}^2\emptyset - \mathrm{sh}^2\emptyset = \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{4}2\eta\mu + \frac{1}{4}\mu^2 - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{4}2\eta\mu - \frac{1}{4}\mu^2$$

$$x^2 - y^2 = \mathrm{ch}^2\emptyset - \mathrm{sh}^2\emptyset = \frac{1}{4}2\eta\mu + \frac{1}{4}2\eta\mu = \eta.\mu = 1$$

$$x^2 - y^2 = \mathrm{ch}^2\emptyset - \mathrm{sh}^2\emptyset = \eta.\mu = 1 \qquad 35.5$$

Da soma do $\mathrm{ch}\emptyset$ e $\mathrm{sh}\emptyset$ resulta η e da subtração do $\mathrm{ch}\emptyset$ e $\mathrm{sh}\emptyset$ resulta μ:

$$\mathrm{ch}\emptyset + \mathrm{sh}\emptyset = \frac{1}{2}(\eta + \mu) + \frac{1}{2}(\eta - \mu) \qquad 35.6$$

$$\mathrm{ch}\emptyset + \mathrm{sh}\emptyset = \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\mu = \eta$$

$$\mathrm{ch}\emptyset + \mathrm{sh}\emptyset = \eta \qquad 35.7$$

$$\mathrm{ch}\emptyset - \mathrm{sh}\emptyset = \frac{1}{2}(\eta + \mu) - \frac{1}{2}(\eta - \mu)$$

$$\mathrm{ch}\emptyset - \mathrm{sh}\emptyset = \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\mu = \mu$$

$$\mathrm{ch}\emptyset - \mathrm{sh}\emptyset = \mu \qquad 35.8$$

Então para que duas funções sejam hiperbólicas é somente necessário que sejam inversamente proporcionais na forma $\mathrm{f}(\emptyset).\mathrm{g}(\emptyset) = \eta.\mu = 1$

Podemos construir com a hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$ um triângulo retângulo descrito da seguinte forma:

$$x^2 - y^2 = 1 \to x^2 = y^2 + 1^2 = h^2 = a^2 + b^2. \qquad 35.9$$

Neste triângulo temos a hipotenusa h igual a x, o cateto “a” igual a y e o cateto b igual a 1.

Com 3 e 9 obtemos:

$$h = x = \mathrm{ch}\emptyset = \frac{1}{2}(\eta + \mu) \qquad a = y = \mathrm{sh}\emptyset = \frac{1}{2}(\eta - \mu) \qquad b = 1 \qquad 35.10$$

$$h + a = \mathrm{ch}\emptyset + \mathrm{sh}\emptyset = \eta \qquad h - a = \mathrm{ch}\emptyset - \mathrm{sh}\emptyset = \mu \qquad 35.11$$

Podemos definir as seguintes funções trigonométricas neste triangulo:

$$a = h.\cos\alpha \qquad b = h.\text{sen}\alpha = 1 \rightarrow h = \frac{1}{\text{sen}\alpha} \qquad a = h.\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} \tag{35.12}$$

$$h^2 = a^2 + b^2 \rightarrow h^2 = (h.\cos\alpha)^2 + (h.\text{sen}\alpha)^2 \rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{35.13}$$

De 10 e 12 obtemos as relações entre as funções hiperbólicas e as funções trigonométricas:

$$h = \text{ch}\emptyset = \frac{1}{\text{sen}\alpha} \qquad a = \text{sh}\emptyset = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} \tag{35.14}$$

Com 11 e 14 obtemos:

$$\eta = h + a = \frac{1}{\text{sen}\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{\text{sen}\alpha}{1-\cos\alpha} \qquad \eta = \frac{1}{\mu} \tag{35.15}$$

$$\mu = h - a = \frac{1}{\text{sen}\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \mu = \frac{1}{\eta} \tag{35.16}$$

$$\eta^2 = \left(\frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\right)\left(\frac{\text{sen}\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} \rightarrow \eta = \sqrt{\frac{1+\cos}{1-\cos\alpha}} \qquad \eta.\mu = 1 \tag{35.17}$$

$$\mu^2 = \left(\frac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\right)\left(\frac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \rightarrow \mu = \sqrt{\frac{1-\cos}{1+\cos}} \qquad \eta.\mu = 1 \tag{35.18}$$

Da trigonometria temos:

$$\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos}{1+\cos\alpha}} \tag{35.19}$$

Esta aplicada em 17 e 18 resulta:

$$\eta = \frac{1}{\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1+\cos}{1-\cos}} \qquad \eta.\mu = 1 \tag{35.20}$$

$$\mu = \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos}{1+\cos\alpha}} \qquad \eta.\mu = 1 \tag{35.21}$$

No §17 definimos os fatores de proporção η e μ como:

$$\begin{cases} x' - ct' = \eta(x - ct) \text{ A} \\ x' + ct' = \mu(x + ct) \text{ B} \end{cases} \rightarrow 17.04 \qquad \eta.\mu = 1 \tag{35.22}$$

As equações 22 e suas inversas são:

$$\begin{cases} x - ct = \mu(x' - ct') & \text{C} \\ x + ct = \eta(x' + ct') & \text{D} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' - ct' = \eta(x - ct) & \text{A} \\ x' + ct' = \mu(x + ct) & \text{B} \end{cases} 17.04 \qquad \eta.\mu = 1 \tag{35.23}$$

Aplicando 20 e 21 em 23 obtemos:

$$\begin{cases} x - ct = \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)(x' - ct') & \text{C} \\ x + ct = \frac{1}{\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}(x' + ct') & \text{D} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' - ct' = \frac{1}{\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}(x - ct) & \text{A} \\ x' + ct' = \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)(x + ct) & \text{B} \end{cases} \tag{35.24}$$

$$\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x-ct}{x'-ct'} \qquad \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x'+ct'}{x+ct} \tag{35.25}$$

$$\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x-ct}{x'-ct'} \qquad \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x'+ct'}{x+ct} \tag{35.26}$$

$$\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x-ct}{x'-ct'} = \frac{x'+ct'}{x+ct} \tag{35.27}$$

Em 27 temos a descrição de dois triângulos retângulos com os mesmos ângulos.

No quadro seguinte de acordo com 23 temos a geometria que descreve 27.

A Geometria das Transformações de Hendrik Lorentz (GTHL)						
Eixo $X \perp Y$	Coordenada X	Coordenada Y	Distância entre pontos do Eixo X		Distância entre pontos do Eixo Y	
Ponto	Observador O	Observador O’				
0	zero	zero	$X0 \leftrightarrow X1$	$x - ct$	$X0 \leftrightarrow Y1$	$x' - ct'$
1	$x - ct = \mu(x' - ct')$	$x' - ct' = \eta(x - ct)$	$X1 \leftrightarrow X2$	ct	$Y1 \leftrightarrow Y2$	ct’
2	x	x’	$X2 \leftrightarrow X3$	ct	$Y2 \leftrightarrow Y3$	ct’
3	$x + ct = \eta(x' + ct')$	$x' + ct' = \mu(x + ct)$				
Os eixos X e Y são perpendiculares $X \perp Y$.						
O observador O está sobre o eixo X e o Observador O’ está sobre o eixo Y.						
A reta que une $X1 \leftrightarrow Y1$ faz ângulo $\alpha/2$ com o eixo Y.						
A reta que une $X3 \leftrightarrow Y3$ faz ângulo $\alpha/2$ com o eixo X.						

Fazendo em 23 as somas (C+D) e (A+B) e as subtrações (D-C) e (B-A) resulta as Transformações de H. Lorentz de 28 na forma primária sem qualquer consideração sobre a propagação de um raio de luz. Do quadro GTHL o mesmo se obtém se para ambas as coordenadas fizermos a média da soma do ponto 1 com o ponto 3 e a média da subtração do ponto 3 menos o ponto 1.

$$\begin{cases} x - ct = \mu(x' - ct') & C \\ x + ct = \eta(x' + ct') & D \end{cases} \qquad \begin{cases} x' - ct' = \eta(x - ct) & A \\ x' + ct' = \mu(x + ct) & B \end{cases} \quad 17.04 \qquad \eta.\mu = 1 \qquad 35.23$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}[\eta(x' + ct') + \mu(x' - ct')] \rightarrow x > ct \rightarrow \ A\ x' = \frac{1}{2}[\mu(x + ct) + \eta(x - ct)] \rightarrow x' > ct' \rightarrow \ C \\ ct = \frac{1}{2}[\eta(x' + ct') - \mu(x' - ct')] \rightarrow ct < x \rightarrow B\ ct' = \frac{1}{2}[\mu(x + ct) - \eta(x - ct)] \rightarrow ct' < x' \rightarrow \ D \end{cases} \qquad 35.28$$

Nas Transformações de Lorentz de 28 para ambos os observadores o espaço é maior que o tempo. Consequentemente o espaço propaga em uma velocidade que é maior que a velocidade de propagação do tempo que propaga na velocidade da luz.

Continuação

No §17.07 obtivemos os fatores de proporção η e μ descritos da seguinte forma:

$$\eta = \frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}} \qquad \mu = \frac{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}} \qquad \eta.\mu = 1 \qquad 17.07 \qquad 35.29$$

Considerando $ct \geq zero$ e $ct' \geq zero$ e sendo as variáveis $\eta = \eta(v)$ e $\mu = \mu(v)$ funções da velocidade, assim em 29 quando $v = zero$ teremos $\eta = \mu = 1$ e quando $zero < v < c$ então temos $\eta > 1 > \mu$. 35.30

Com 17.02 e 17.03 podemos escrever:

$$ab = cd = (x + ct)(x - ct) = (x' + ct')(x' - ct') = x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \qquad 35.31$$

Onde está denominado:

$$\begin{cases} a = x + ct \\ b = x - ct \end{cases} \qquad \begin{cases} c = x' + ct' \\ d = x' - ct' \end{cases} \qquad 35.32$$

$$a^2 - b^2 = (x + ct)^2 - (x - ct)^2 = 4xct \qquad c^2 - d^2 = (x' + ct')^2 - (x' - ct')^2 = 4x'ct' \qquad 35.33$$

As inversas de 32 são:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(a + b) \rightarrow a + b = 2x \\ ct = \frac{1}{2}(a - b) \rightarrow a - b = 2ct \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(c + d) \rightarrow c + d = 2x' \\ ct' = \frac{1}{2}(c - d) \rightarrow c - d = 2ct' \end{cases} \qquad 35.34$$

De 34 obtemos:

$$xct = \frac{1}{2}(a + b)\frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{4}(a^2 - b^2) \qquad x'ct' = \frac{1}{2}(c + d)\frac{1}{2}(c - d) = \frac{1}{4}(c^2 - d^2) \qquad 35.35$$

E temos 35 igual a 33.

Aplicando 34 em 31 obtemos:

$$ab = (x + ct)(x - ct) = x^2 - c^2t^2 = \left[\frac{1}{2}(a + b)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(a - b)\right]^2 = ab \qquad 35.36$$

$$cd = (x' + ct')(x' - ct') = x'^2 - c^2t'^2 = \left[\frac{1}{2}(c + d)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(c - d)\right]^2 = cd \qquad 35.37$$

Aplicando 32 em 23 e escrevendo na ordem do alfabeto obtemos as fundamentais proporções:

$$\begin{cases} a = \eta c \\ b = \mu d \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \mu a \\ d = \eta b \end{cases} \qquad \eta.\mu = 1 \qquad 35.38$$

Com as propriedades seguintes:

$$ab = cd \qquad ad = \eta^2 bc \qquad bc = \mu^2 ad \qquad ac = ca \qquad bd = db \qquad 35.39$$

De 32 e 38 obtemos:

$$\eta = \frac{a}{c} = \frac{d}{b} = \frac{x+c}{x'+ct} = \frac{x'-ct\prime}{x-ct} \qquad \mu = \frac{c}{a} = \frac{b}{d} = \frac{x'+ct\prime}{x+ct} = \frac{x-c}{x'-ct\prime} \qquad 35.40$$

$$\eta.\mu = 1 \rightarrow \frac{a}{c}.\frac{b}{d} = 1 \rightarrow \left(\frac{x+ct}{x'+ct\prime}\right).\left(\frac{x-ct}{x'-ct\prime}\right) = 1 \qquad 35.41$$

Aplicando de 30 $v = \text{zero} \rightarrow \eta = 1$ em 39 resulta:

$$ad = \eta^2 bc \rightarrow \frac{a}{c} = \eta^2\frac{b}{d} = 1^2\frac{b}{d} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \rightarrow ad = bc \qquad 35.42$$

Com $ad = bc \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ construímos as seguintes proporções:

$$\begin{cases} ad = bc \rightarrow ad + ac = bc + ac \rightarrow a(c + d) = c(a + b) \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d} \rightarrow A \\ ad = bc \rightarrow ad - bd = bc - bd \rightarrow d(a - b) = b(c - d) \rightarrow \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \rightarrow B \end{cases} \qquad 35.43$$

De 43 obtemos as proporções $ad = bc \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$ 35.44

$$\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d} \rightarrow ac + ad = ac + bc \rightarrow ad = bc \rightarrow \eta = 1 \qquad 35.45$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a-b}{c-d} \rightarrow ac - ad = ac - bc \rightarrow ad = bc \rightarrow \eta = 1 \qquad 35.46$$

$$\frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \rightarrow ad + bd = bc + bd \rightarrow ad = bc \rightarrow \eta = 1 \qquad 35.47$$

$$\frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \rightarrow bc - bd = ad - bd \rightarrow ad = bc \rightarrow \eta = 1 \qquad 35.48$$

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \rightarrow (a + b)(c - d) = (c + d)(a - b) \rightarrow ad = bc \rightarrow \eta = 1 \qquad 35.49$$

Fazendo $\eta = \frac{a}{c}$ em 39 onde $ad = \eta^2 bc \rightarrow \frac{a}{c}.\frac{d}{b} = \eta.\eta$ para $\text{zero} < v < c$ e $\eta > 1 > \mu$:

$$\eta > 1 \rightarrow \eta = \frac{a}{c} \rightarrow \frac{a}{c}.\frac{d}{b} = \eta.\eta \rightarrow \eta = \frac{a}{c} = \frac{d}{b} \rightarrow ab = cd \rightarrow \mu = \frac{1}{\eta} = \frac{c}{a} = \frac{b}{d} \rightarrow \eta > 1 \qquad 35.50$$

Com a proporção $\eta = \frac{a}{c} = \frac{d}{b} \rightarrow ab = cd$ e 43 obtemos para $\eta > 1$:

$$\eta = \frac{a}{c} = \frac{d}{b} = \frac{a+b}{c+d} = \frac{c-d}{a-b} \rightarrow (a + b)(a - b) = (c + d)(c - d) \rightarrow a^2 - b^2 = c^2 - d^2 \qquad 35.51$$

$$\mu = \frac{c}{a} = \frac{b}{d} = \frac{c+d}{a+b} = \frac{a-b}{c-d} \rightarrow (a + b)(a - b) = (c + d)(c - d) \rightarrow a^2 - b^2 = c^2 - d^2 \qquad 35.52$$

$$\eta.\mu = \left(\frac{a+b}{c+d}\right).\left(\frac{a-b}{c-d}\right) = 1 \qquad 35.53$$

Em 51 e 52 só tem utilidade para $\mathrm{zero} < v < c$ o que resultar na proporção $ab = cd$ o que é mais bem descrito como:

$$\begin{cases}\eta = \frac{a}{c} = \frac{d}{b} \rightarrow \eta = \frac{a+b}{c+d} = \frac{c-d}{a-b} \rightarrow A \\ \mu = \frac{c}{a} = \frac{b}{d} \rightarrow \mu = \frac{c+d}{a+b} = \frac{a-b}{c-d} \rightarrow B\end{cases} \rightarrow ab = cd \rightarrow (a+b)(a-b) = (c+d)(c-d) \qquad 35.54$$

Para $\eta > 1$ em 54 só temos as proporções fundamentais de 38 e as proporções:

$$\begin{cases}a + b = \eta(c+d) \rightarrow A \\ a - b = \mu(c-d) \rightarrow B\end{cases} \qquad \begin{cases}c + d = \mu(a+b) \rightarrow C \\ c - d = \eta(a-b) \rightarrow D\end{cases} \qquad 35.55$$

De 55 obtemos:

$$(a+b)(a-b) = \eta(c+d)\mu(c-d) \rightarrow a^2 - b^2 = c^2 - d^2 \qquad 35.56$$

$$(c+d)(c-d) = \mu(a+b)\eta(a-b) \rightarrow c^2 - d^2 = a^2 - b^2 \qquad 35.57$$

Somando e subtraindo 55 obtemos a transformação alfa:

$$\begin{cases}a = \frac{1}{2}[\eta(c+d) + \mu(c-d)] \rightarrow A \\ b = \frac{1}{2}[\eta(c+d) - \mu(c-d)] \rightarrow B\end{cases} \qquad \begin{cases}c = \frac{1}{2}[\mu(a+b) + \eta(a-b)] \rightarrow C \\ d = \frac{1}{2}[\mu(a+b) - \eta(a-b)] \rightarrow D\end{cases} \qquad 35.58$$

Aplicando 58 em $a^2 - b^2$ obtemos:

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{4}[\eta(c+d) + \mu(c-d)]^2 - \frac{1}{4}[\eta(c+d) - \mu(c-d)]^2$$

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{4}[\eta^2(c+d)^2 + 2\eta(c+d)\mu(c-d) + \mu^2(c-d)^2] - \frac{1}{4}[\eta^2(c+d)^2 - 2\eta(c+d)\mu(c-d) + \mu^2(c-d)^2]$$

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{4}[2(c+d)(c-d)] + \frac{1}{4}[2(c+d)(c-d)] = (c+d)(c-d) = c^2 - d^2$$

$$a^2 - b^2 = (c+d)(c-d) = c^2 - d^2 \qquad 35.59$$

Aplicando 58 em $c^2 - d^2$ obtemos:

$$c^2 - d^2 = \frac{1}{4}[\mu(a+b) + \eta(a-b)]^2 - \frac{1}{4}[\mu(a+b) - \eta(a-b)]^2$$

$$c^2 - d^2 = \frac{1}{4}[\mu^2(a+b)^2 + 2\mu(a+b)\eta(a-b) + \eta^2(a-b)^2] - \frac{1}{4}[\mu^2(a+b)^2 - 2\mu(a+b)\eta(a-b) + \eta^2(a-b)^2]$$

$$c^2 - d^2 = \frac{1}{4}[2(a+b)(a-b)] + \frac{1}{4}[2(a+b)(a-b)] = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$c^2 - d^2 = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad 35.60$$

Aplicando 34 na igualdade $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(a-b)\right]^2$ obtemos:

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(a-b)\right]^2 = [x]^2 + [ct]^2 = x^2 + c^2t^2 \qquad 35.61$$

Aplicando 34 na igualdade $\frac{1}{2}(c^2 + d^2) = \left[\frac{1}{2}(c+d)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(c-d)\right]^2$ obtemos:

$$\frac{1}{2}(c^2 + d^2) = \left[\frac{1}{2}(c+d)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(c-d)\right]^2 = [x']^2 + [ct']^2 = x'^2 + c^2t'^2 \qquad 35.62$$

Em 61 e 62 temos a média quadrática onde x e x' são os raios, portanto novamente temos o espaço maior que o tempo, ou seja, $x > ct$ e $x' > ct'$.

“Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim”
(Chico Xavier)

Referências

[1] Alonso & Finn, Vol. I e II, Ed. Edgard Blücher LTDA, 1972.
[2] Robert Resnik, Introdução à Relatividade Especial, Ed. Univ. de S. Paulo e Ed. Polígono S.A., 1971.
[3] E. Terradas Y R. Ortiz, Relatividad, Cia. Ed. Espasa-Calpe Argentina S. A., 1952.
[4] Abraham Pais, “Sutil é o Senhor...” A ciência e a vida de Albert Einstein, Ed. Nova Fronteira, 1995.
[5] Marcel Rouault, Física Atômica, Ao Livro Técnico LTDA, 1959.
[6] H. A. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowisk, O Princípio da Relatividade, edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 1989.
[7] L. Landau e E. Lifchitz, Teoria do Campo, Hemus – Livraria Editora LTDA.
[8] Robert Martin Eisberg, Fundamentos da Física Moderna, Ed. Guanabara Dois S.A., 1979.
[9] Max Born, Física Atômica, edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 1986.
http://www.wbabin.net/physics/faraj7.htm
[10]Princípios de Mecânica Quântica Vladimir A. Fock.